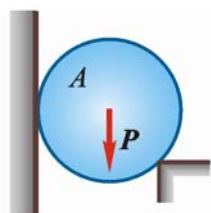
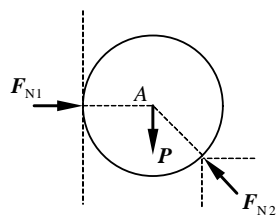


第1章 静力学公理和物体的受力分析

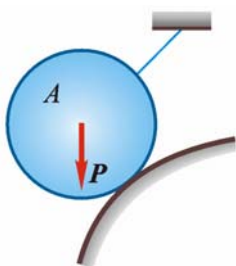
1-1 画出下列各图中物体 A , ABC 或构件 AB , AC 的受力图。未画重力的各物体的自重不计，所有接触处均为光滑接触。



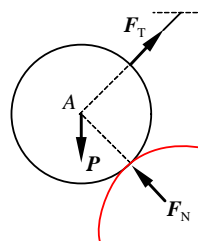
(a)



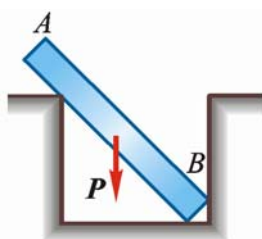
(a1)



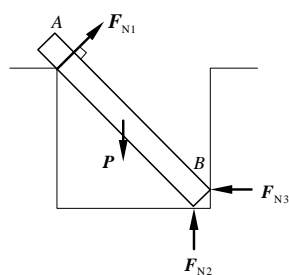
(b)



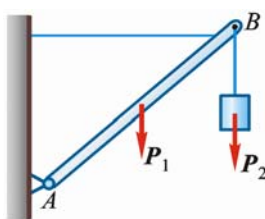
(b1)



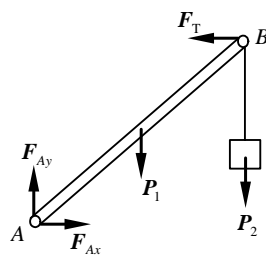
(c)



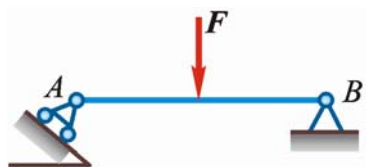
(c1)



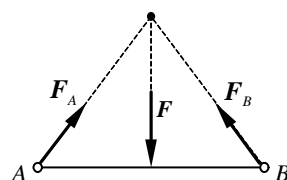
(d)



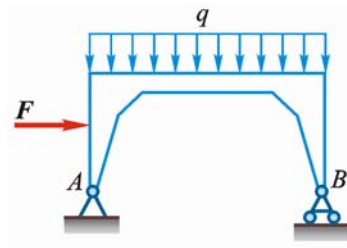
(d1)



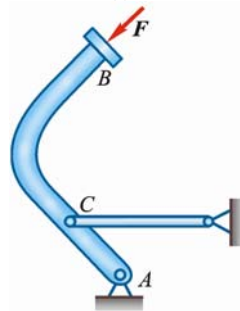
(e)



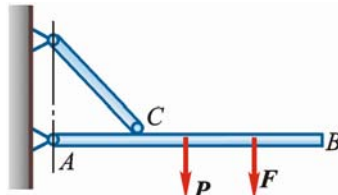
(e1)



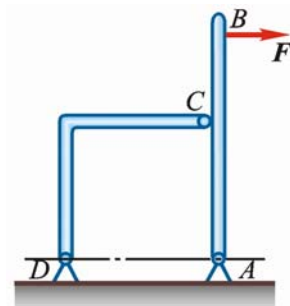
(f)



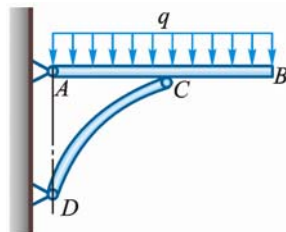
(g)



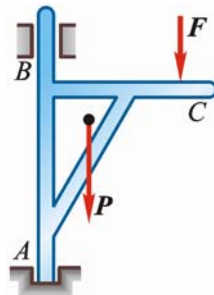
(h)



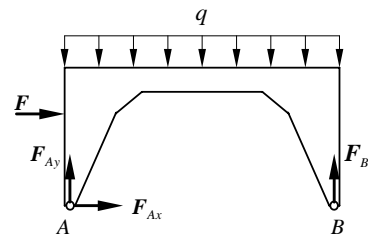
(i)



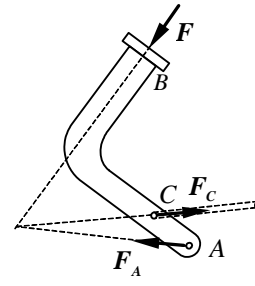
(j)



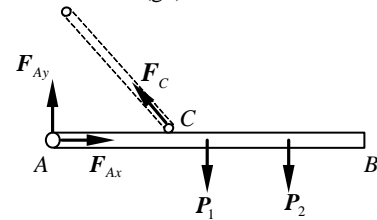
(k)



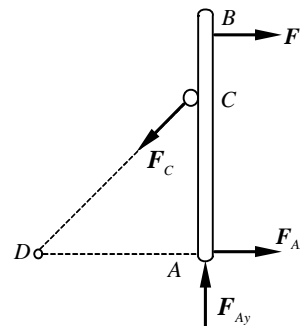
(f1)



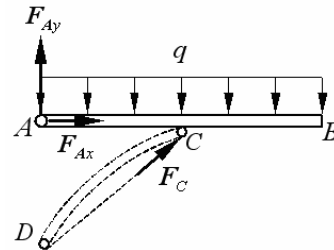
(g1)



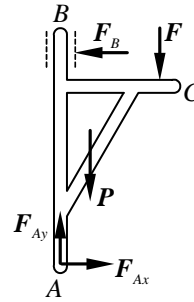
(h1)



(i1)



(j1)



(k1)

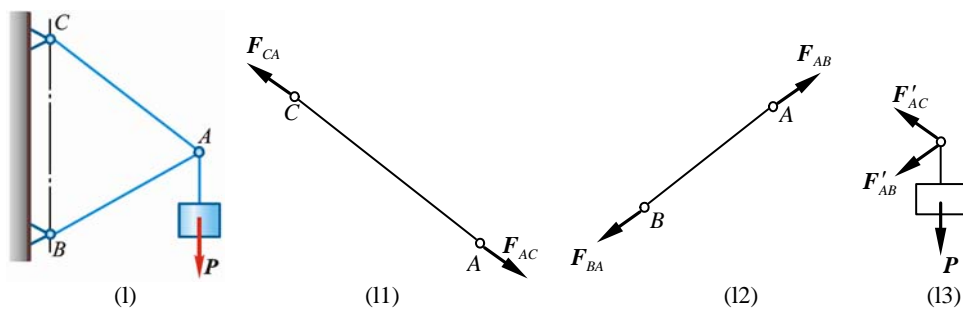
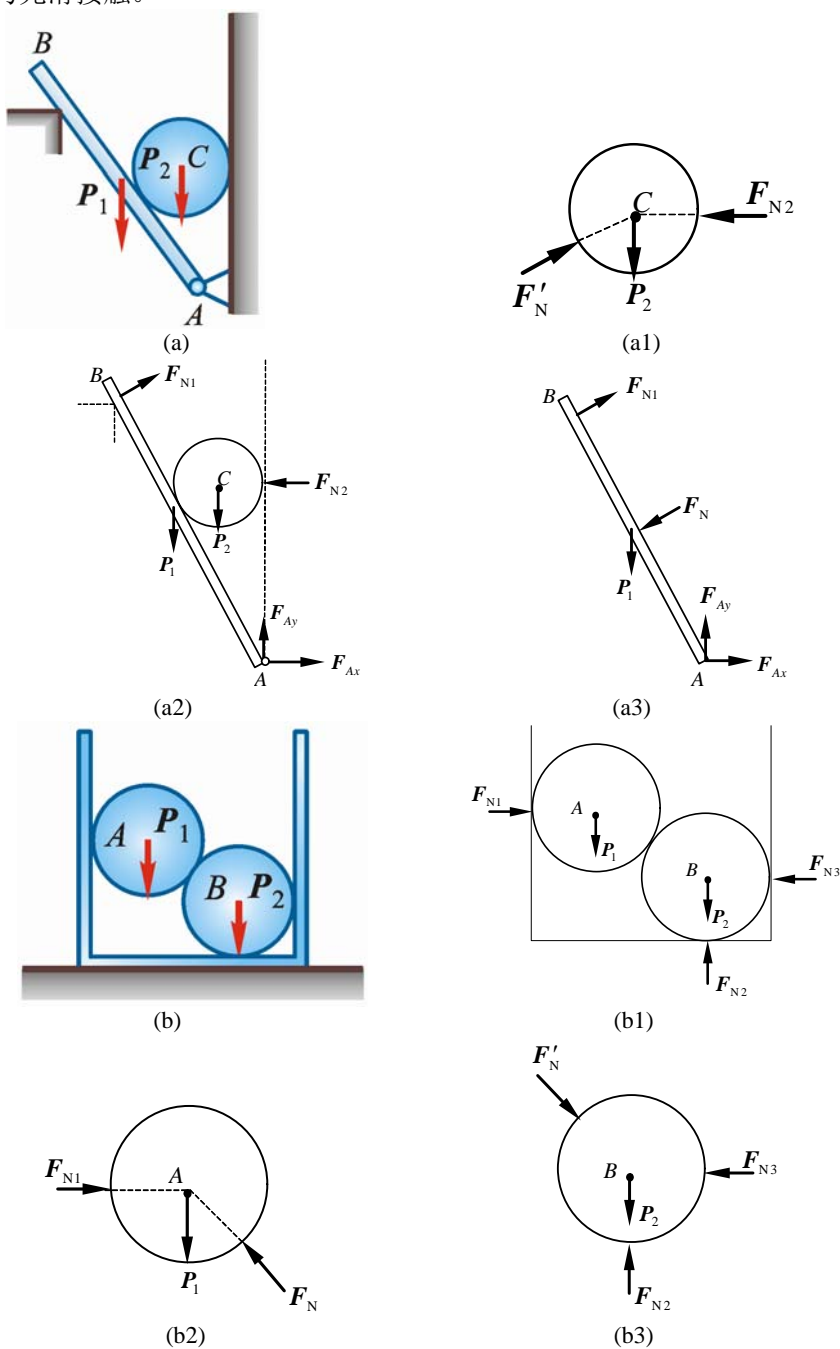
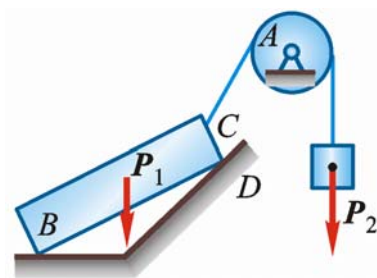


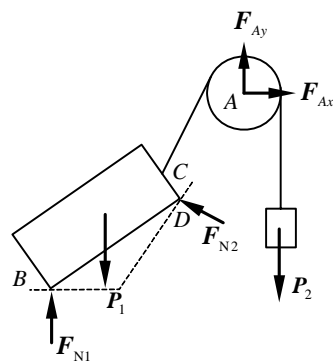
图 1-1

1-2 画出下列每个标注字符的物体的受力图。题图中未画重力的各物体的自重不计，所有接触处均为光滑接触。

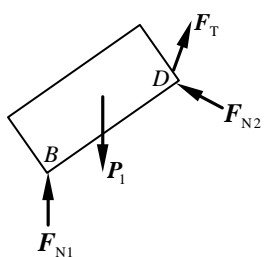




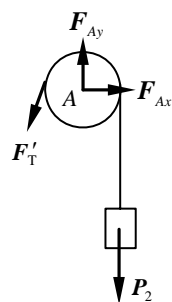
(c)



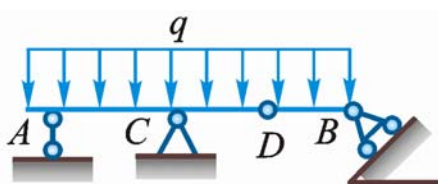
(c1)



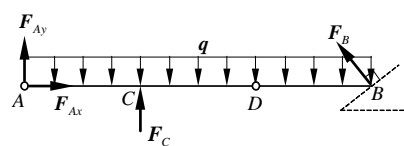
(c2)



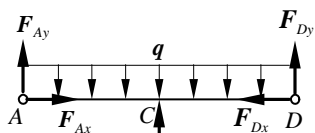
(c3)



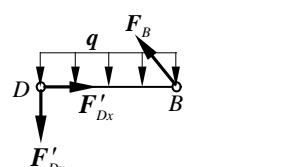
(d)



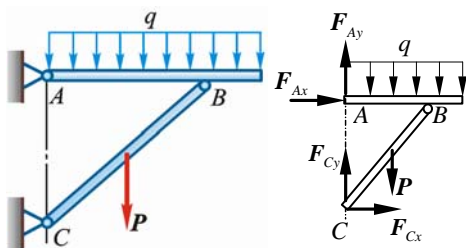
(d1)



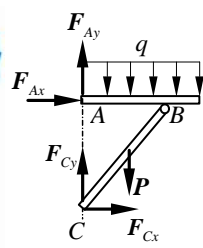
(d2)



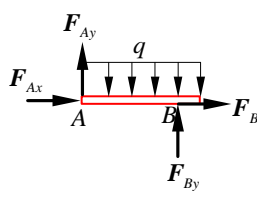
(d3)



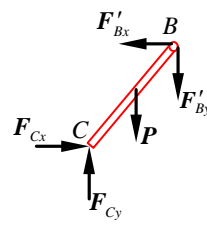
(e)



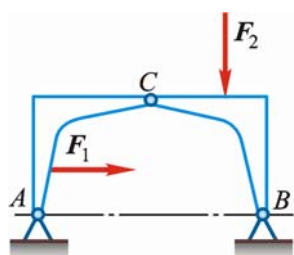
(e1)



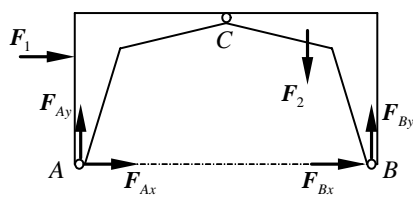
(e2)



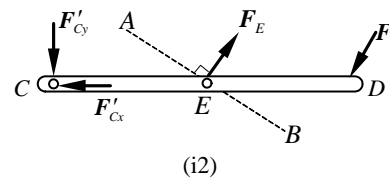
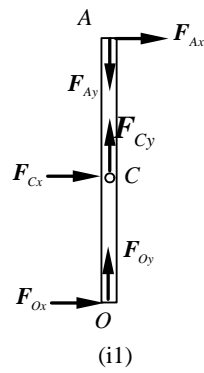
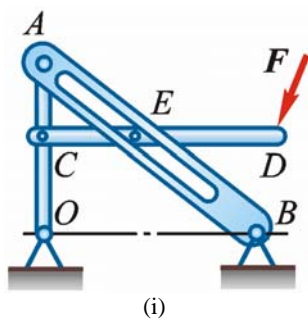
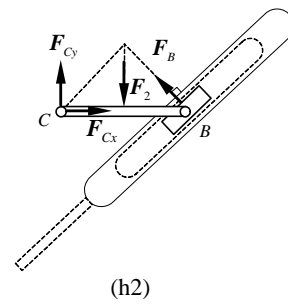
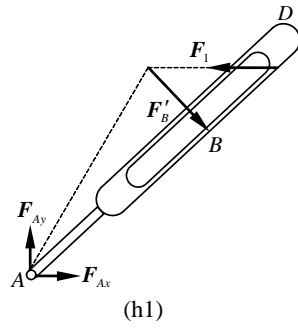
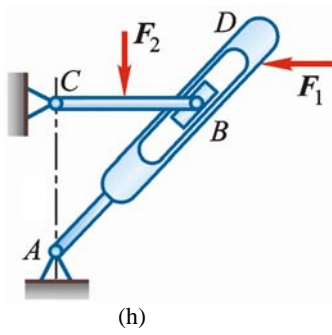
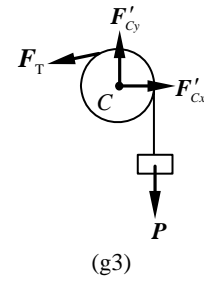
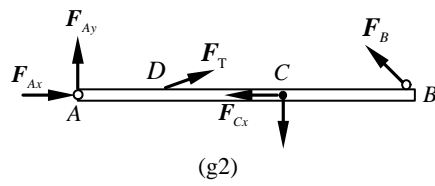
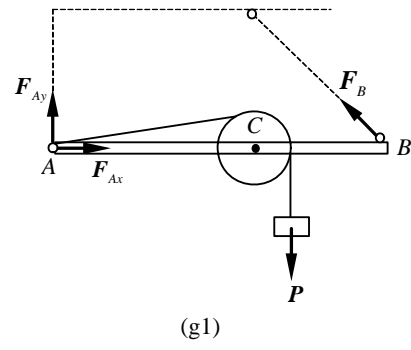
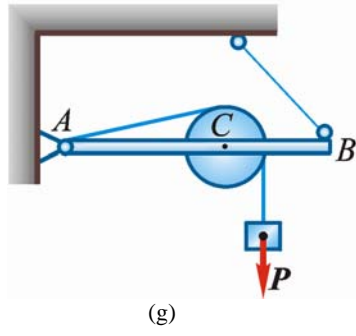
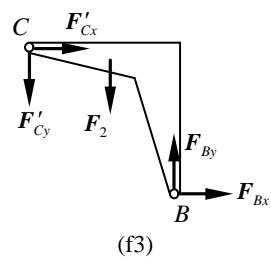
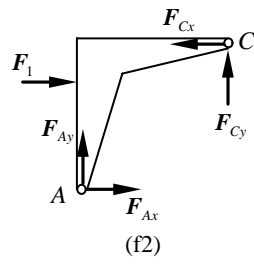
(e3)

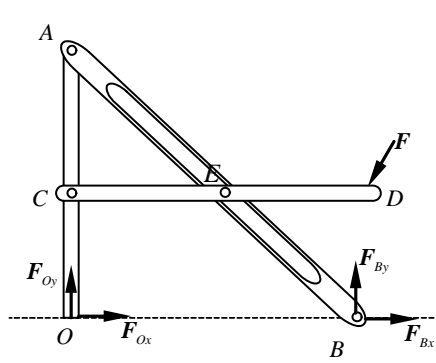


(f)

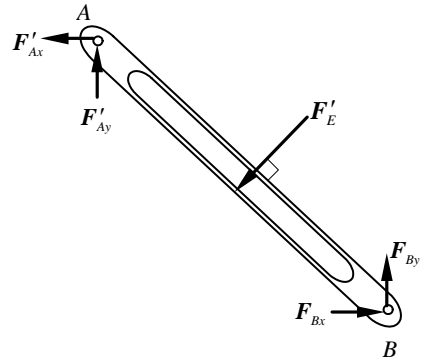


(f1)

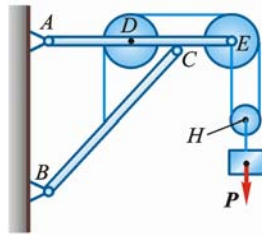




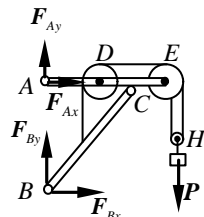
(i3)



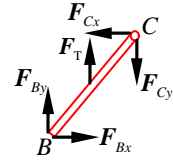
(i4)



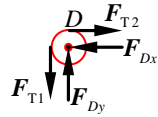
(j)



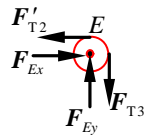
(j1)



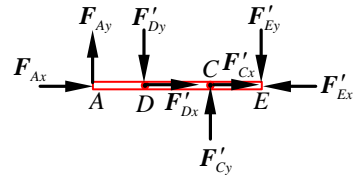
(j2)



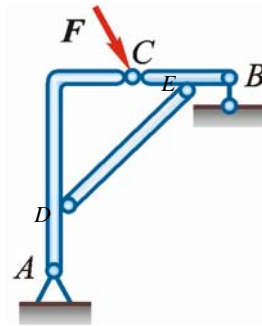
(j3)



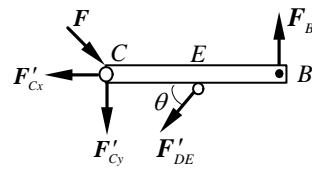
(j4)



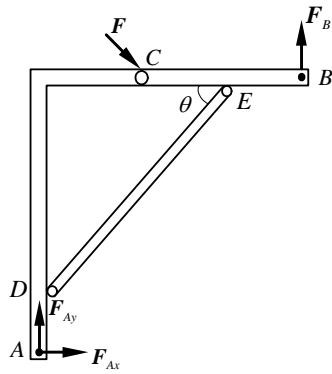
(j5)



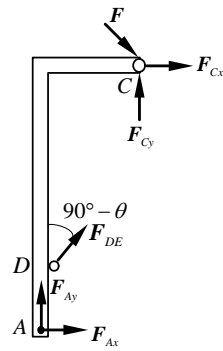
(k)



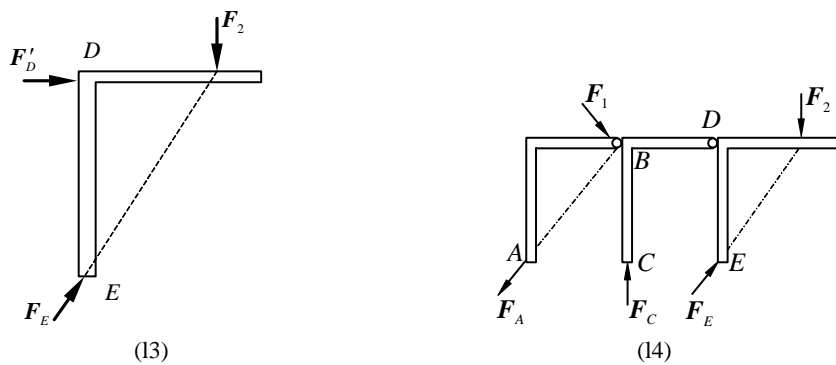
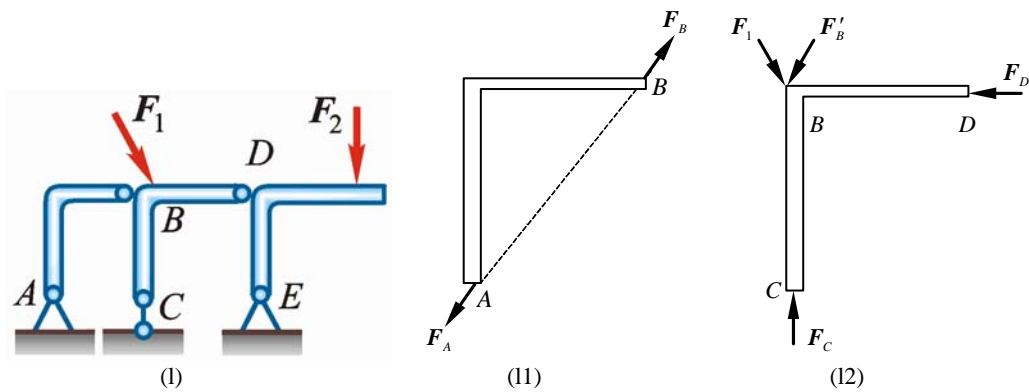
(k1)



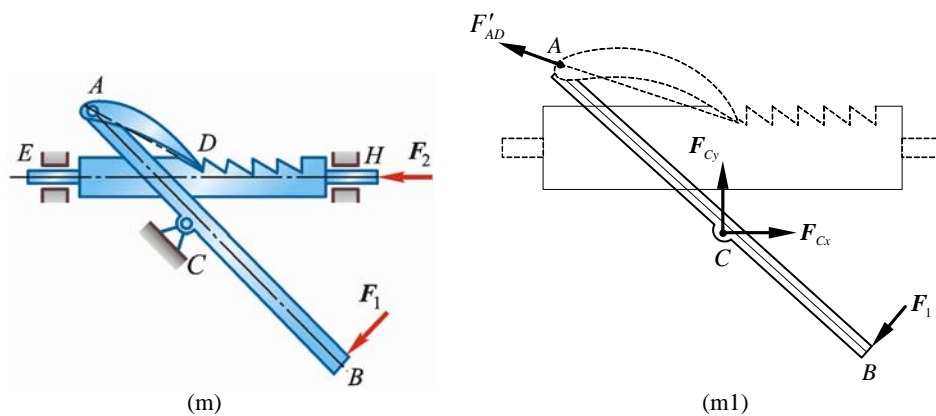
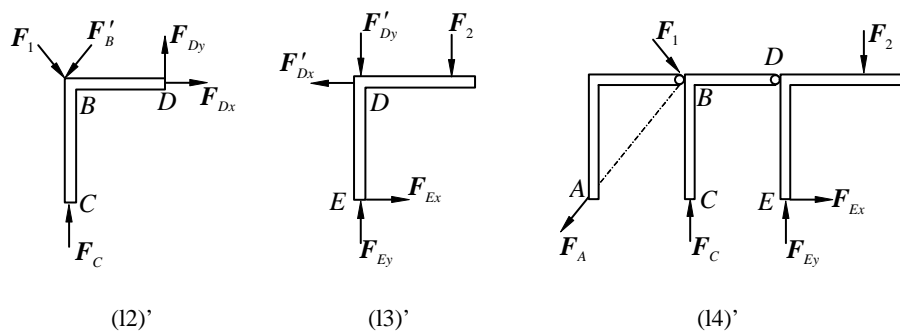
(k2)



(k3)



或



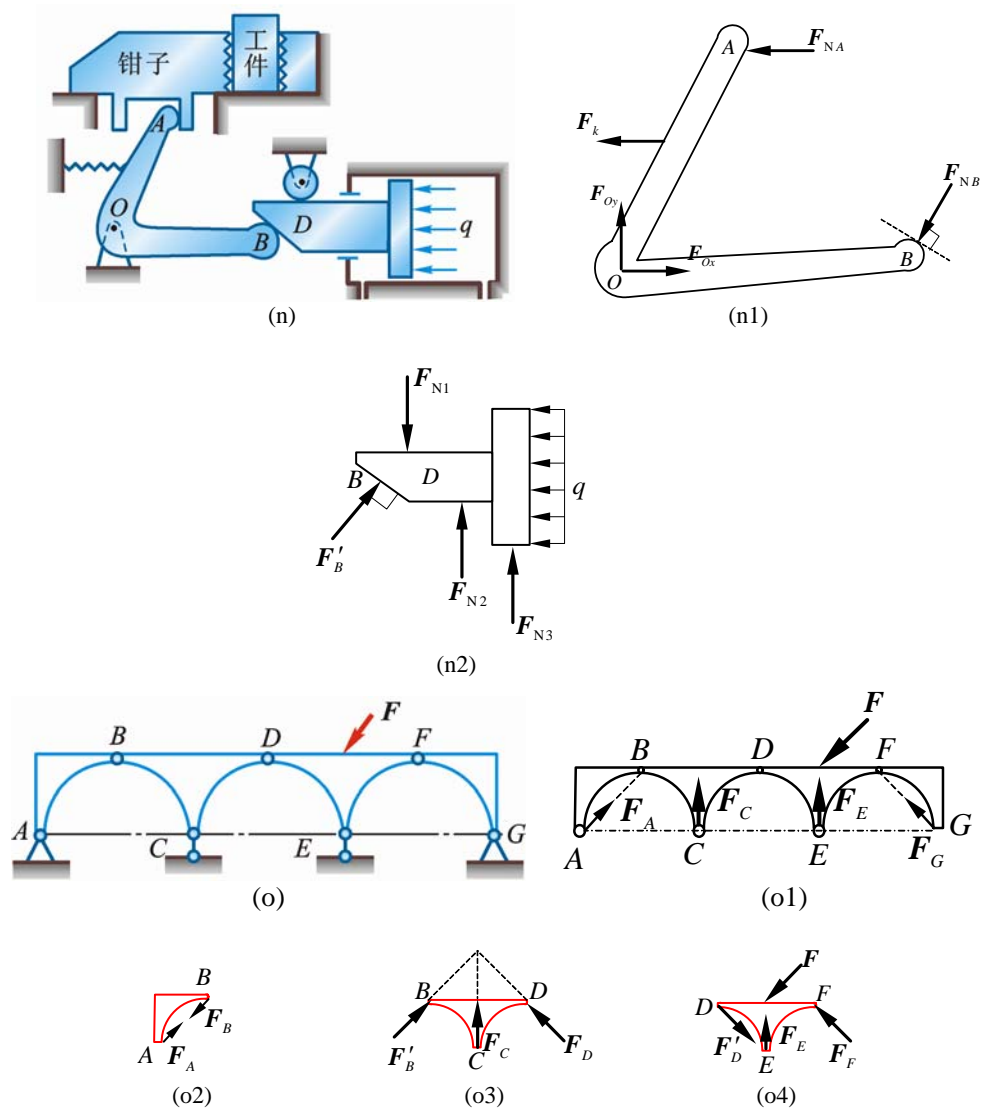
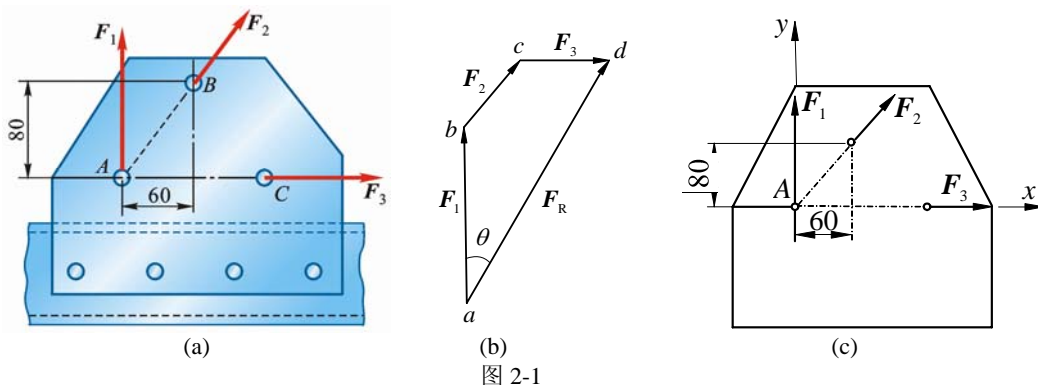


图 1-2

第2章 平面汇交力系与平面力偶系

2-1 铆接薄板在孔心 A , B 和 C 处受 3 个力作用, 如图 2-1a 所示。 $F_1 = 100\text{ N}$, 沿铅直方向; $F_3 = 50\text{ N}$, 沿水平方向, 并通过点 A ; $F_2 = 50\text{ N}$, 力的作用线也通过点 A , 尺寸如图。求此力系的合力。



解 (1) 几何法

作力多边形 $abcd$, 其封闭边 ad 即确定了合力 F_R 的大小和方向。由图 2-1b, 得

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(F_1 + F_2 \times 4/5)^2 + (F_3 + F_2 \times 3/5)^2} \\ &= \sqrt{(100\text{ N} + 50\text{ N} \times 4/5)^2 + (50\text{ N} + 50\text{ N} \times 3/5)^2} = 161\text{ N} \\ \angle(F_R, F_1) &= \arccos\left(\frac{F_1 + F_2 \times 4/5}{F_R}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{100\text{ N} + 50\text{ N} \times 4/5}{161\text{ N}}\right) = 29.74^\circ = 29^\circ 44' \end{aligned}$$

(2) 解析法 建立如图 2-1c 所示的直角坐标系 Axy 。

$$\sum F_x = F_1 + F_2 \times 3/5 = 50\text{ N} + 50\text{ N} \times 3/5 = 80\text{ N}$$

$$\sum F_y = F_1 + F_2 \times 4/5 = 100\text{ N} + 50\text{ N} \times 4/5 = 140\text{ N}$$

$$F_R = (80i + 140j)\text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(80\text{ N})^2 + (140\text{ N})^2} = 161\text{ N}$$

2-2 如图 2-2a 所示, 固定在墙壁上的圆环受 3 条绳索的拉力作用, 力 F_1 沿水平方向, 力 F_3 沿铅直方向, 力 F_2 与水平线成 40° 角。3 个力的大小分别为 $F_1=2\,000\text{ N}$, $F_2=2\,500\text{ N}$, $F_3=1\,500\text{ N}$ 。求 3 个力的合力。

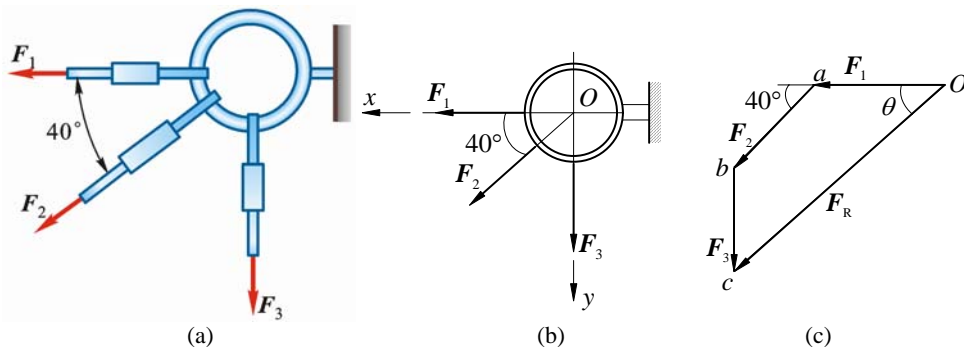


图 2-2

解 (1) 解析法

建立如图 2-2b 所示的直角坐标系 Oxy 。

$$\sum F_x = F_1 + F_2 \cos 40^\circ = 2\,000\text{ N} + 2\,500\text{ N} \cdot \cos 40^\circ = 3\,915\text{ N}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_3 + F_2 \sin 40^\circ = 1\,500\text{ N} + 2\,500\text{ N} \cdot \sin 40^\circ = 3\,107\text{ N} \\ F_R &= \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \left(\sqrt{3\,915^2 + 3\,107^2} \right) \text{ N} = 4\,998\text{ N} \\ \angle(F_R, F_x) &= \arccos\left(\frac{\sum F_x}{F_R}\right) = \arccos\left(\frac{3\,915\text{ N}}{4\,998\text{ N}}\right) = 38^\circ 26'\end{aligned}$$

(2) 几何法

作力多边形 $Oabc$ ，封闭边 Oc 确定了合力 F_R 的大小和方向。根据图 2-2c，得

$$\begin{aligned}F_R &= \sqrt{(F_1 + F_2 \cos 40^\circ)^2 + (F_3 + F_2 \sin 40^\circ)^2} \\ &= \sqrt{(2\,000 + 2\,500 \cos 40^\circ)^2 + (1\,500 + 2\,500 \sin 40^\circ)^2} = 4\,998\text{ N} \\ \angle(F_R, F_1) &= \arccos \frac{\sum F_x}{F_R} = \arccos \frac{3\,915\text{ N}}{4\,998\text{ N}} = 38^\circ 26'\end{aligned}$$

2-3 物体重 $P=20\text{ kN}$ ，用绳子挂在支架的滑轮 B 上，绳子的另一端接在绞车 D 上，如图 2-3a 所示。转动绞车，物体便能升起。设滑轮的大小、杆 AB 与 CB 自重及摩擦略去不计， A 、 B 、 C 三处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时，求拉杆 AB 和支杆 CB 所受的力。

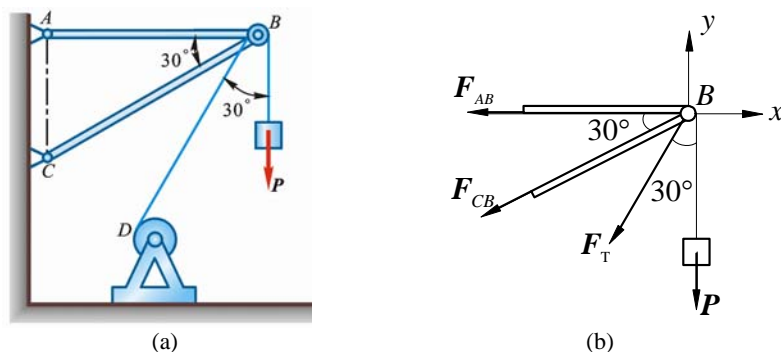


图 2-3

解 取支架、滑轮及重物为研究对象，坐标及受力如图 2-3b 所示。由平衡理论得

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \quad -F_{AB} - F_{CB} \cos 30^\circ - F_T \sin 30^\circ = 0 \\ \sum F_y &= 0, \quad -F_{CB} \sin 30^\circ - F_T \cos 30^\circ - P = 0\end{aligned}$$

将 $F_T=P=20\text{ kN}$ 代入上述方程，得

$$F_{AB} = 54.6\text{ kN} \text{ (拉)}, \quad F_{CB} = -74.6\text{ kN} \text{ (压)}$$

2-4 火箭沿与水平面成 $\beta=25^\circ$ 角的方向作匀速直线运动，如图 2-4a 所示。火箭的推力 $F_1=100\text{ kN}$ ，与运动方向成 $\theta=5^\circ$ 角。如火箭重 $P=200\text{ kN}$ ，求空气动力 F_2 和它与飞行方向的交角 γ 。

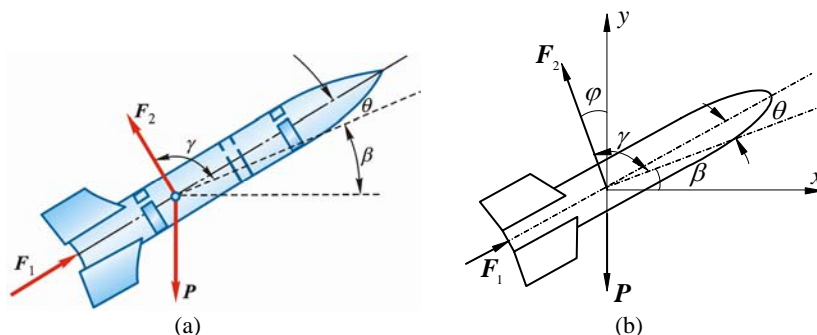


图 2-4

解 坐标及受力如图 2-4b 所示，由平衡理论得

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \quad F_1 \cos(\theta + \beta) - F_2 \sin \varphi = 0 \\ F_2 \sin \varphi &= F_1 \cos(\theta + \beta)\end{aligned} \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_1 \sin(\theta + \beta) - P + F_2 \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$F_2 \cos \varphi = P - F_1 \sin(\theta + \beta)$$

式(1)除以式(2), 得

$$\tan \varphi = \frac{F_1 \cos(\theta + \beta)}{P - F_1 \sin(\theta + \beta)}$$

代入有关数据, 解得

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ + \varphi - \beta = 90^\circ + 30^\circ - 25^\circ = 95^\circ$$

将 φ 值等数据代入式(1), 得

$$F_2 = 173 \text{ kN}$$

2-5 如图 2-5a 所示, 刚架的点 B 作用 1 水平力 F , 刚架重量不计。求支座 A, D 的约束力。

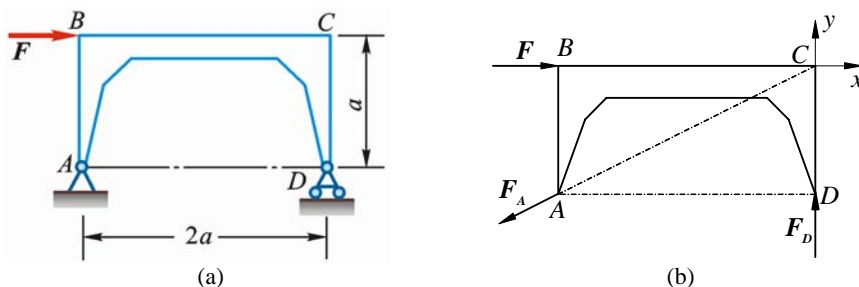


图 2-5

解 研究对象: 刚架。由三力平衡汇交定理, 支座 A 的约束力 F_A 必通过点 C , 方向如图 2-5b 所示。取坐标系 Cxy , 由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F - F_A \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_D - F_A \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad (2)$$

式(1)、(2)联立, 解得

$$F_A = \frac{\sqrt{5}}{2} F = 1.12F, \quad F_D = 0.5F$$

2-6 如图 2-6a 所示, 输电线 ACB 架在两线杆之间, 形成 1 下垂曲线, 下垂距离 $CD=f=1 \text{ m}$, 两电线杆距离 $AB=40 \text{ m}$ 。电线 ACB 段重 $P=400 \text{ N}$, 可近似认为沿 AB 连线均匀分布。求电线中点和两端的拉力。

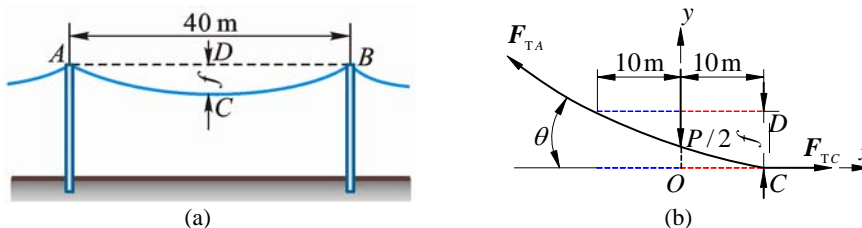


图 2-6

解 本题为悬索问题, 这里采用近似解法, 假定绳索荷重均匀分布。取 AC 段绳索为研究对象, 坐标及受力如图 2-6b 所示。图中:

$$W_1 = \frac{P}{2} = 200 \text{ N}$$

由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{TC} - F_{TA} \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{TA} \sin \theta - W_1 = 0 \quad (2)$$

式 (1)、(2) 联立, 解得

$$F_{TA} = \frac{W_1}{\sin \theta} = \frac{200 \text{ N}}{\frac{1}{\sqrt{10^2 + 1^2}}} = 2010 \text{ N}$$

$$F_{TC} = F_{TA} \cos \theta = 2010 \text{ N} \times \frac{10}{\sqrt{10^2 + 1^2}} = 2000 \text{ N}$$

因对称

$$F_{TB} = F_{TA} = 2010 \text{ N}$$

2-7 如图 2-7a 所示液压夹紧机构中, D 为固定铰链, B, C, E 为活动铰链。已知力 F , 机构平衡时角度如图 2-7a, 求此时工件 H 所受的压紧力。

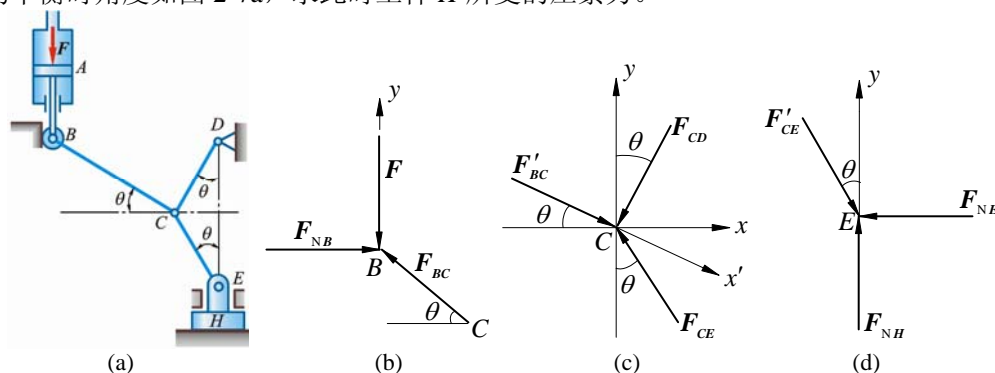


图 2-7

解 (1) 轮 B , 受力如图 2-7b 所示。由平衡理论得

$$\sum F_y = 0, \quad F_{BC} = \frac{F}{\sin \theta} \quad (\text{压})$$

(2) 节点 C , 受力如图 2-7c 所示。由图 2-7c 知, $F'_{BC} \perp F_{CD}$, 由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{BC} - F_{CE} \cos(90^\circ - 2\theta) = 0, \quad F_{CE} = \frac{F_{BC}}{\sin 2\theta}$$

(3) 节点 E , 受力如图 2-7d 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NH} = F'_{CE} \cos \theta = \frac{F}{2 \sin^2 \theta}$$

即工件所受的压紧力

$$F_{NH} = \frac{F}{2 \sin^2 \theta}$$

2-8 图 2-8a 所示为 1 拨桩装置。在木桩的点 A 上系 1 绳, 将绳的另一端固定在点 C , 在绳的点 B 系另 1 绳 BE , 将它的另一端固定在点 E 。然后在绳的点 D 用力向下拉, 使绳的 BD 段水平, AB 段铅直, DE 段与水平线、 CB 段与铅直线间成等角 $\theta = 0.1 \text{ rad}$ (当 θ 很小时, $\tan \theta \approx \theta$)。如向下的拉力 $F=800 \text{ N}$, 求绳 AB 作用于桩上的拉力。

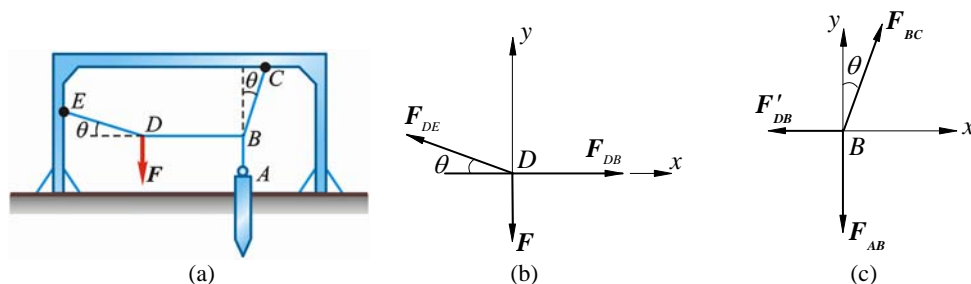


图 2-8

解 (1) 节点 D , 坐标及受力如图 2-8b, 由平衡理论得

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, & F_{DB} - F_{DE} \cos \theta &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{DE} \sin \theta - F &= 0\end{aligned}$$

解得

$$F_{DB} = F \cot \theta$$

讨论: 也可以向垂直于 F_{DE} 方向投影, 直接得

$$F_{DB} = F \cot \theta$$

(2) 节点 B , 坐标及受力如图 2-8c 所示。由平衡理论得

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, & F_{CB} \sin \theta - F_{DB} &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{CB} \cos \theta - F_{AB} &= 0\end{aligned}$$

解得

$$F_{AB} = F_{DB} \cot \theta = F \cot^2 \theta = \frac{F}{\theta^2} = \frac{800 \text{ N}}{0.1^2} = 80 \text{ kN}$$

2-9 铰链 4 杆机构 $CABD$ 的 CD 边固定, 在铰链 A 、 B 处有力 F_1 、 F_2 作用, 如图 2-9a 所示。该机构在图示位置平衡, 不计杆自重。求力 F_1 与 F_2 的关系。

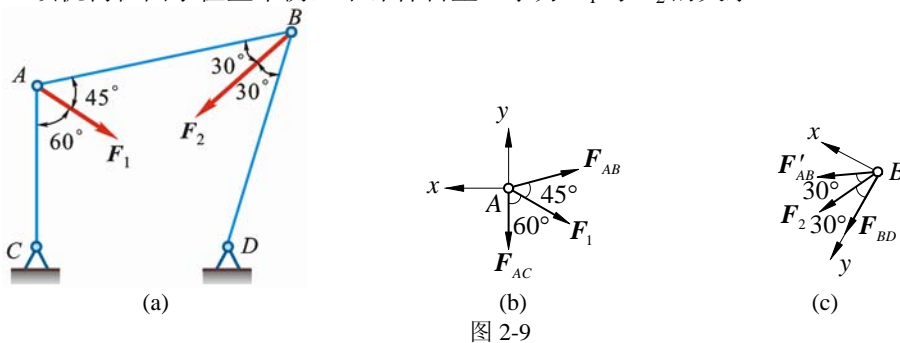


图 2-9

解 (1) 节点 A , 坐标及受力如图 2-9b 所示, 由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{AB} \cos 15^\circ + F_1 \cos 30^\circ = 0, \quad F_{AB} = -\frac{\sqrt{3}F_1}{2\cos 15^\circ} \quad (\text{压})$$

(2) 节点 B , 坐标及受力如图 2-9c 所示, 由平衡理论得

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{AB} \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$F_2 = -\sqrt{3}F_{AB} = \frac{3F_1}{2\cos 15^\circ} = 1.553F_1$$

即 $F_1 : F_2 = 0.644$

2-10 如图 2-10 所示, 刚架上作用力 F 。试分别计算力 F 对点 A 和 B 的力矩。

解 $M_A(F) = -Fb \cos \theta$

$$\begin{aligned}M_B(F) &= -Fb \cos \theta + Fa \sin \theta \\ &= F(a \sin \theta - b \cos \theta)\end{aligned}$$

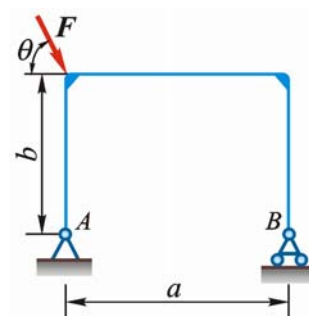


图 2-10

2-11 为了测定飞机螺旋桨所受的空气阻力偶, 可将飞机水平放置, 其 1 轮搁置在地秤上, 如图 2-11a 所示。当螺旋桨未转动时, 测得地秤所受的压力为 4.6 kN , 当螺旋桨转动时, 测得地秤所受的压力为 6.4 kN 。已知两轮间距离 $l = 2.5 \text{ m}$, 求螺旋桨所受的空气阻力偶的矩 M 。

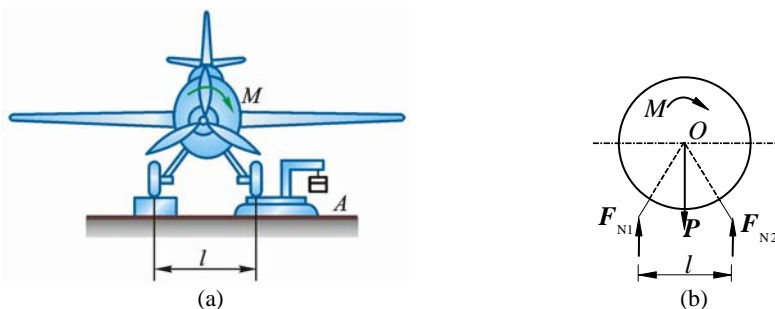


图 2-11

解 研究对象和受力如图 2-11b, 约束力改变量构成 1 力偶, 则

$$\sum M = 0, \quad -M + (6.4 \text{ kN} - 4.6 \text{ kN})l = 0, \quad M = 1.8 \text{ kN} \cdot l = 4.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2-12 已知梁 AB 上作用 1 力偶, 力偶矩为 M , 梁长为 l , 梁重不计。求在图 2-12a, 2-12b, 2-12c 三种情况下支座 A 和 B 的约束力。

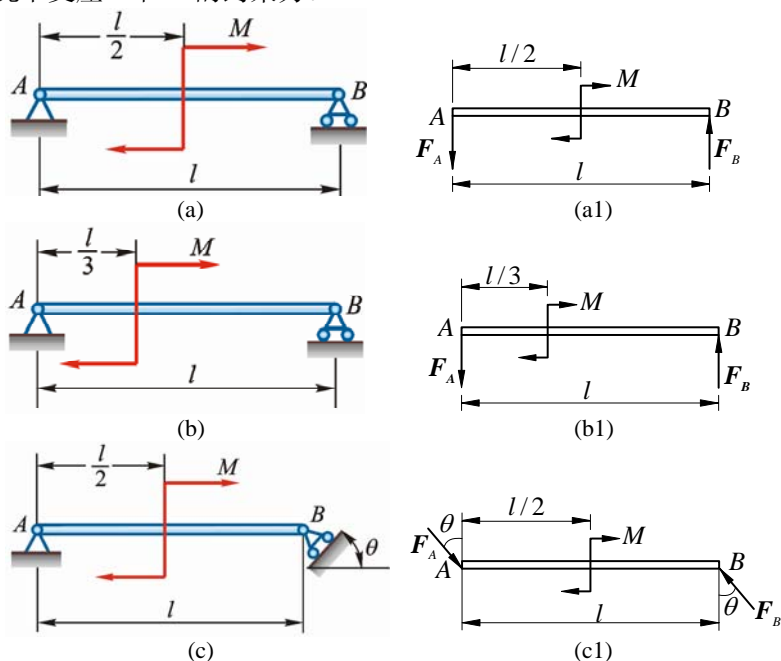


图 2-12

解 (a) 梁 AB, 受力如图 2-12a1 所示。 F_A, F_B 组成为力偶, 故

$$F_A = F_B$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_B l - M = 0, \quad F_B = \frac{M}{l}, \quad F_A = \frac{M}{l}$$

(b) 梁 AB, 受力如图 2-12b1 所示。

$$\sum M_A = 0, \quad F_B l - M = 0, \quad F_B = F_A = \frac{M}{l}$$

(c) 梁 AB, 受力如图 2-12c1 所示。

$$\sum M_A = 0, \quad F_B l \cos \theta - M = 0, \quad F_B = F_A = \frac{M}{l \cos \theta}$$

2-13 图 2-13a 所示结构中, 各构件自重不计。在构件 AB 上作用 1 力偶矩为 M 的力偶, 求支座 A 和 C 的约束力。

解 (1) BC 为二力杆: $F_C = -F_B$ (图 2-13c)

(2) 研究对象 AB, 受力如图 2-13b 所示, F_A, F_B' 组成为力偶, 则

$$\sum M = 0, \quad F_{NA} \times \sqrt{2} \times 2a - M = 0, \quad F_A = \frac{M}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}M}{4a}$$

$$F_C = F_B = F_A = \frac{\sqrt{2}M}{4a}$$

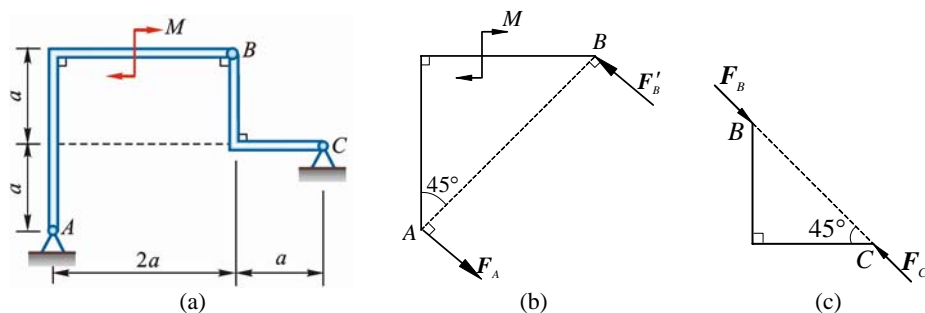


图 2-13

2-14 图 2-14a 中，两齿轮的半径分别是 r_1 , r_2 ，作用于轮 I 上的主动力偶的力偶矩为 M_1 ，齿轮的啮合角为 θ ，不计两齿轮的重量。求使两轮维持匀速转动时齿轮 II 的阻力偶之矩 M_2 及轴承 O_1 , O_2 的约束力的大小和方向。

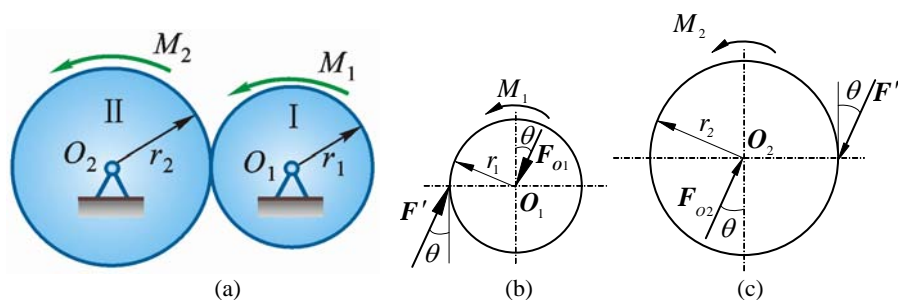


图 2-14

解 (1) 轮 O_1 ，受力如图 2-14b 所示

$$\sum M = 0, \quad M_1 - F_{O1}r_1 \cos \theta = 0, \quad F_{O1} = \frac{M_1}{r_1 \cos \theta} \quad (\text{方向如图})$$

(2) 轮 O_2 ，受力如图 2-14c 所示

$$\sum M = 0, \quad M_2 - F_{O2}r_2 \cos \theta = 0, \quad F_{O2} = \frac{M_2}{r_2 \cos \theta} \quad (\text{方向如图})$$

$$F_{O2} = F' = F = F_{O1}, \quad M_2 = \frac{r_2}{r_1} M$$

2-15 直角弯杆 ABCD 与直杆 DE 及 EC 铰接如图 2-15a，作用在杆 DE 上力偶的力偶矩 $M = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，不计各杆件自重，不考虑摩擦，尺寸如图。求支座 A, B 处的约束力和杆 EC 受力。

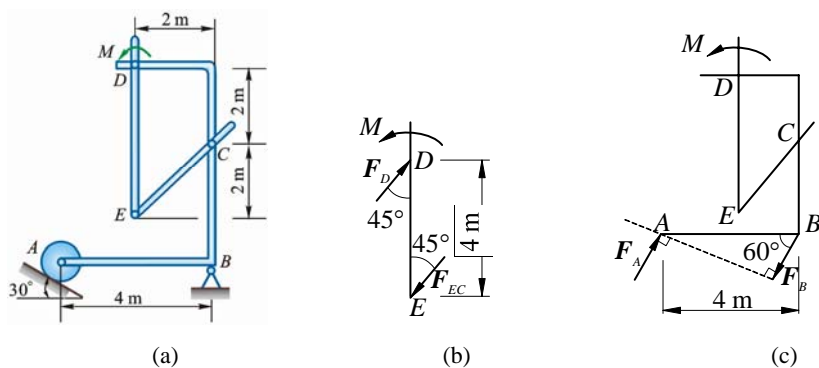


图 2-15

解 (1) EC 为二力杆，杆 DE 受力如图 2-15b 所示

$$\sum M = 0, \quad -F_{EC} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + M = 0$$

$$F_{EC} = \frac{40}{2\sqrt{2}} = (10\sqrt{2}) \text{ kN} = 14.1 \text{ kN}$$

(2) 整体，受力图 c。为构成约束力偶与外力偶 M 平衡，有

$$F_A = F_B$$

$$\sum M = 0, \quad M - F_A \times 4 \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$F_A = \left(\frac{20}{\sqrt{3}} \right) \text{ kN} \approx 11.5 \text{ kN}, \quad F_B \approx 11.5 \text{ kN}$$

2-16 在图 2-16a 所示结构中，各构件的自重略去不计，在构件 BC 上作用 1 力偶矩为 M 的力偶，各尺寸如图。求支座 A 的约束力。

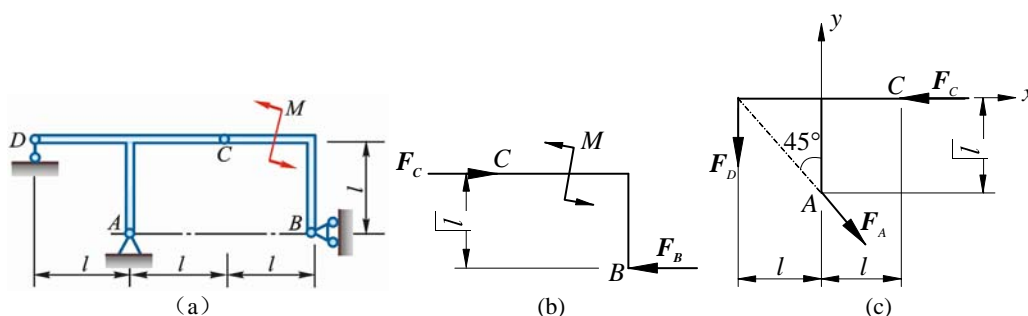


图 2-16

解 (1) 研究对象 BC ，受力如图 2-16b 所示，为构成约束力偶，有

$$F_B = F_C$$

$$\sum M = 0, \quad -F_B \cdot l + M = 0, \quad F_B = \frac{M}{l}$$

$$F_C = F_B = \frac{M}{l}$$

(2) 研究对象： ADC ，受力如图 2-16c 所示

$$\sum F_x = 0, \quad -F_C' + F_A \cos 45^\circ = 0$$

$$F_A = \sqrt{2}F_C' = \frac{\sqrt{2}M}{l} \quad (\text{方向如图})$$

2-17 在图 2-17a 所示机构中，曲柄 OA 上作用 1 力偶，其力偶矩为 M ；另在滑块 D 上作用水平力 F 。机构尺寸如图，各杆重量不计。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。

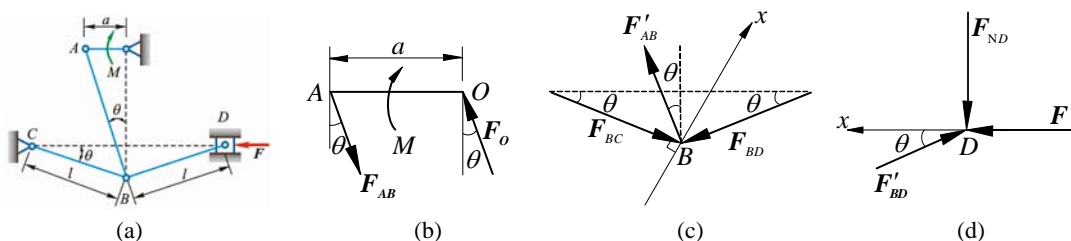


图 2-17

解 (1) 杆 AO ，受力如图 2-17b 所示

$$\sum M = 0, \quad F_{AB} \cos \theta \cdot a = M, \quad F_{AB} = \frac{M}{a \cos \theta} \quad (1)$$

(2) 节点 B ，受力如图 2-17c 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F_{AB}' \cos 2\theta - F_{BD} \sin 2\theta = 0$$

式（1）代入上式，得

$$F_{BD} = \frac{F'_{AB} \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{M \cos 2\theta}{a \cos \theta \sin 2\theta} \quad (2)$$

（3）滑块 D ，受力如图 2-17d 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F - F_{BD} \cos \theta = 0$$

式（2）代入上式，得

$$F = \frac{M}{a} \cot 2\theta$$

第3章 平面任意力系

3-1 图 3-1a 中, 已知 $F_1 = 150 \text{ N}$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 300 \text{ N}$, $F = F' = 200 \text{ N}$ 。求力系向点 O 简化的结果; 并求力系合力的大小及其与原点 O 的距离 d 。

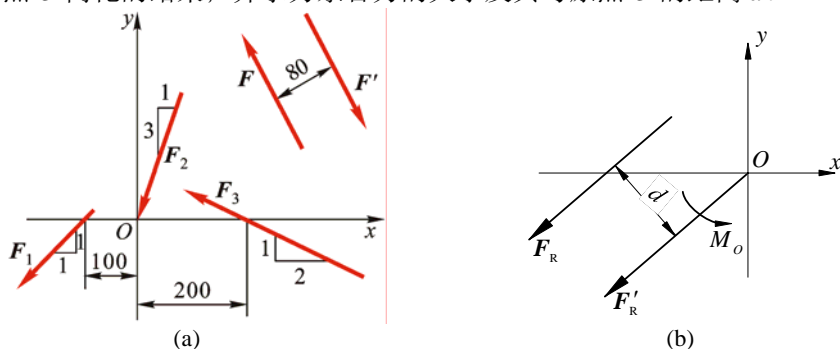


图 3-1

解 (1) 求合力 F_R 的大小

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - F_2 \times \frac{1}{\sqrt{10}} - F_3 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= -150 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 200 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{10}} - 300 \text{ N} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = -437.62 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - F_2 \times \frac{3}{\sqrt{10}} - F_3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= -150 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 200 \text{ N} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + 300 \text{ N} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -161.62 \text{ N}\end{aligned}$$

主矢 $F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \left(\sqrt{(-437.62)^2 + (-161.62)^2} \right) \text{ N} = 466.5 \text{ N}$

主矩 $M_O = F_1 \times \frac{0.10}{\sqrt{2}} \text{ m} + F_3 \times \frac{0.20}{\sqrt{5}} \text{ m} - F \times 0.08 \text{ m}$

$$= 150 \text{ N} \times \frac{0.10}{\sqrt{2}} \text{ m} + 300 \text{ N} \times \frac{0.20}{\sqrt{5}} \text{ m} - 200 \text{ N} \times 0.08 \text{ m} = 21.44 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{逆})$$

合力 F_R 在原点 O 的左侧上方, 如图 3-1b 所示, 且 $F_R = F_R' = 466.5 \text{ N}$

(2) 求距离 d

$$d = \frac{|M_O|}{F_R'} = \frac{21.44 \text{ N} \cdot \text{m}}{466.5 \text{ N}} = 0.0459 \text{ m} = 4.59 \text{ cm} \quad (\text{图 3-1b})$$

3-2 图 3-2a 所示平面任意力系中 $F_1 = 40\sqrt{2} \text{ N}$, $F_2 = 80 \text{ N}$, $F_3 = 40 \text{ N}$, $F_4 = 110 \text{ N}$, $M = 2000 \text{ N} \cdot \text{mm}$ 。各力作用位置如图 3-2b 所示, 图中尺寸的单位为 mm 。求: (1) 力系向点 O 简化的结果; (2) 力系的合力的大小、方向及合力作用线方程。

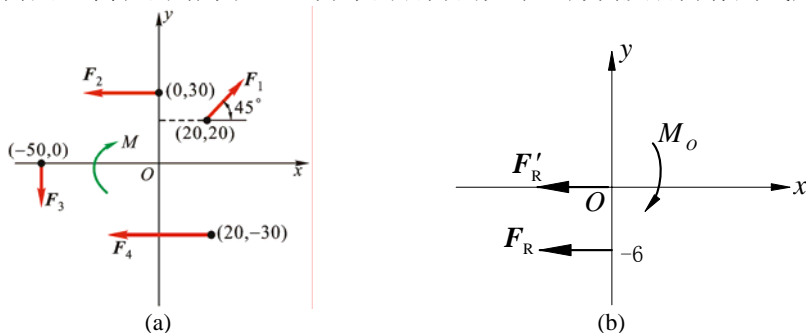


图 3-2

解 (1) 向点 O 简化

$$F'_{Rx} = F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 - F_4 = -150 \text{ N}, \quad F'_{Ry} = F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 = 0$$

$$\mathbf{F}'_R = -150\mathbf{i} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} M_O &= F_2 \times 30 \text{ mm} + F_3 \times 50 \text{ mm} - F_4 \times 30 \text{ mm} - M \\ &= 80 \text{ N} \times 30 \text{ mm} + 40 \text{ N} \times 50 \text{ mm} - 110 \text{ N} \times 30 \text{ mm} - 2000 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (\text{顺}) \\ &= -900 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

(2) 合力

大小: $F_R = 150 \text{ N}$, 方向水平向左。合力作用线方程:

$$|y| = \frac{|M_O|}{|F_R|} = \frac{900 \text{ N} \cdot \text{mm}}{150 \text{ N}} = 6 \text{ mm}$$

由 M_O 转向知合力作用线方程为

$$y = -6 \text{ mm}$$

3-3 如图 3-3 所示, 当飞机作稳定航行时, 所有作用在它上面的力必须相互平衡。已知飞机的重力 $P = 30 \text{ kN}$, 螺旋桨的牵引力 $F = 4 \text{ kN}$ 。飞机的尺寸: $a = 0.2 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$, $c = 0.05 \text{ m}$, $l = 5 \text{ m}$ 。求阻力 F_x , 机翼升力 F_{y1} 和尾部的升力 F_{y2} 。

解 选择坐标系如图。

$$\sum F_x = 0, \quad F_x - F = 0, \quad F_x = F = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{y2}(a+l) - Pa - F(b+c) = 0$$

$$F_{y2} = \frac{Pa + F(b+c)}{a+l} = 1.27 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{y1} + F_{y2} - P = 0$$

$$F_{y1} = P - F_{y2} = 28.7 \text{ kN}$$

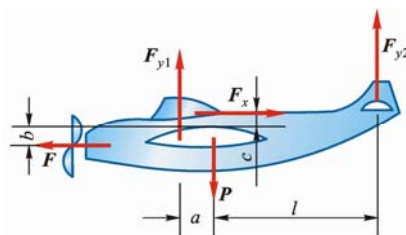
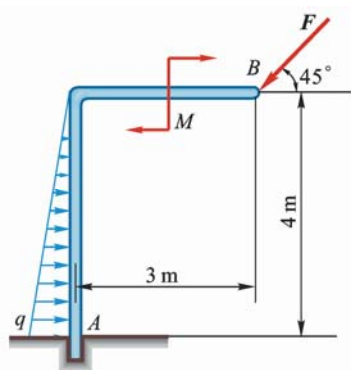
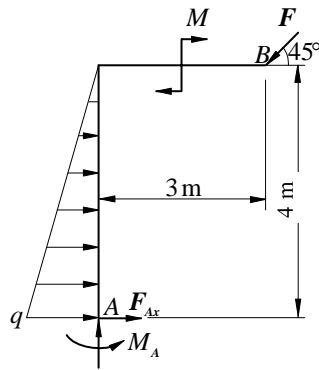


图 3-3

3-4 在图 3-4a 所示刚架中, $q = 3 \text{ kN/m}$, $F = 6\sqrt{2} \text{ kN}$, $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 不计刚架的自重。求固定端 A 的约束力。



(a)



(b)

图 3-4

解 受力如图 3-4b 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} = F \sin 45^\circ = 6 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + \frac{1}{2}q \times 4 \text{ m} - F \cos 45^\circ = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - \frac{1}{2}q \times 4 \text{ m} \times \frac{4}{3} \text{ m} - M - F \sin 45^\circ \times 3 \text{ m} + F \cos 45^\circ \times 4 \text{ m} = 0$$

$$M_A = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{逆})$$

3-5 如图 3-5a 所示, 飞机机翼上安装 1 台发动机, 作用在机翼 OA 上的气动力按梯形分布: $q_1 = 60 \text{ kN/m}$, $q_2 = 40 \text{ kN/m}$, 机翼重为 $P_1 = 45 \text{ kN}$, 发动机重为 $P_2 = 20 \text{ kN}$, 发动机螺旋桨的作用力偶矩 $M = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。求机翼处于平衡状态时, 机翼根部固定端 O 的受力。

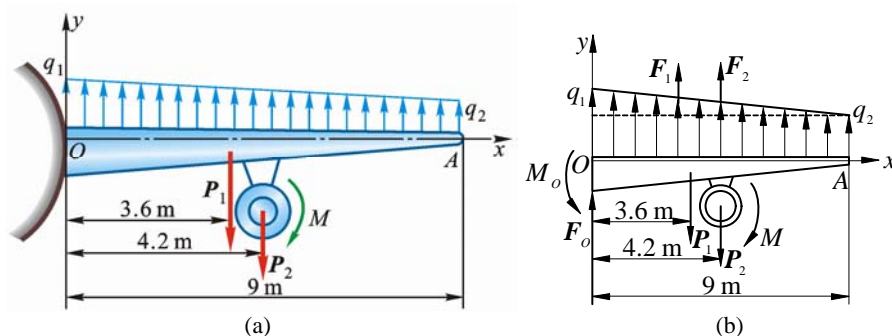


图 3-5

解 研究对象: 机翼 (含螺旋桨), 受力如图 3-5b 所示。梯形分布载荷看作三角形分布载荷 $(q_1 - q_2)$ 和均布载荷 q_2 两部分合成。三角形分布载荷 $q_1 - q_2$ 的合力

$$F_1 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \times 9 \text{ m} = 90\,000 \text{ N}$$

均布载荷 q_2 的合力

$$F_2 = q_2 \times 9 \text{ m} = 360\,000 \text{ N}$$

F_2 位于离 O 4.5 m 处。

$$\sum F_y = 0, \quad F_O + F_1 + F_2 - P_1 - P_2 = 0$$

$$F_O = P_1 + P_2 + F_1 - F_2 = -385\,000 \text{ N} = -385 \text{ kN}$$

$$\sum M_O = 0, \quad M_O + F_1 \times 3 \text{ m} + F_2 \times 4.5 \text{ m} - P_1 \times 3.6 \text{ m} - P_2 \times 4.2 \text{ m} - M = 0$$

$$M_O = 1\,626 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (逆)}$$

3-6 无重水平梁的支承和载荷如图 3-6a、图 3-6b 所示。已知力 F , 力偶矩为 M 的力偶和强度为 q 的均匀载荷。求支座 A 和 B 处的约束力。

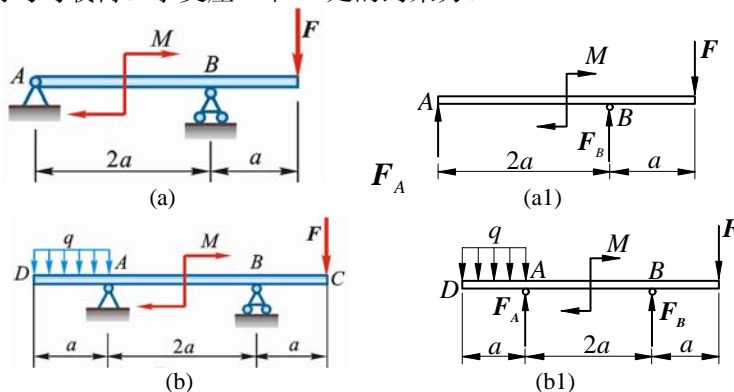


图 3-6

解 (1) 梁 AB , 坐标及受力如图 3-6a1 所示

$$\sum M_A = 0, \quad F_B \times 2a - M - F \times 3a = 0, \quad F_B = \frac{1}{2}(3F + \frac{M}{a})$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_B - F = 0, \quad F_A = F - F_B = -\frac{1}{2}(F + \frac{M}{a})$$

(2) 梁 AB , 坐标及受力如图 3-6b1 所示

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}qa^2 + F_B \times 2a - F \times 3a - M = 0$$

$$F_B = \frac{1}{2}(3F + \frac{M}{a} - \frac{1}{2}qa)$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - F - qa = 0$$

$$F_A = -\frac{1}{2}(F + \frac{M}{a} - \frac{5}{2}qa)$$

3-7 如图 3-7a 所示，液压式汽车起重机全部固定部分（包括汽车自重）总重为 $P_1 = 60 \text{ kN}$ ，旋转部分总重为 $P_2 = 20 \text{ kN}$ ， $a = 1.4 \text{ m}$ ， $b = 0.4 \text{ m}$ ， $l_1 = 1.85 \text{ m}$ ， $l_2 = 1.4 \text{ m}$ 。求：（1）当 $l = 3 \text{ m}$ ，起吊重为 $P = 50 \text{ kN}$ 时，支撑腿 A, B 所受地面的约束力；（2）当 $l = 5 \text{ m}$ 时，为了保证起重机不致翻倒，问最大起重为多大？

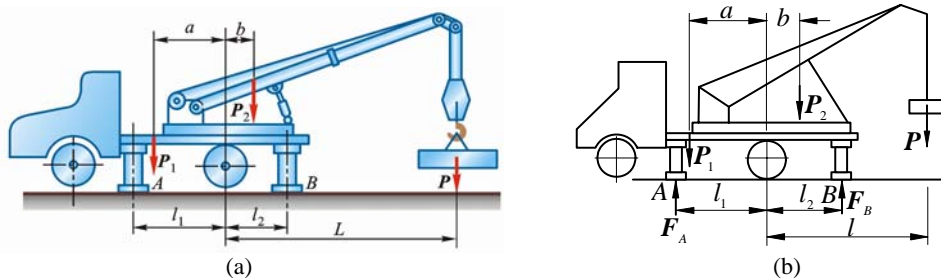


图 3-7

解 整体，坐标及受力如图 3-7b 所示。

（1）求当 $l = 3 \text{ m}$ ， $P = 50 \text{ kN}$ 时的 F_A ， F_B

$$\sum M_A = 0, -P_1(l_1 - a) - P_2(l_1 + b) - P(l + l_1) - F_B(l_1 + l_2) = 0$$

$$F_B = \frac{1}{l_1 + l_2}[P_1(l_1 - a) + P_2(l_1 + b) + P(l + l_1)] = 96.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - P_1 - P_2 - P = 0$$

$$F_A = P_1 + P_2 + P - F_B = 33.2 \text{ kN}$$

（2）求当 $l = 5 \text{ m}$ 时，保证起重机不翻倒的 P 。

起重机不翻倒的临界状态时， $F_A = 0$ 。

$$\sum M_B = 0, P_1(a + l_2) + P_2(l_2 - b) - P(l - l_2) = 0$$

$$P = \frac{1}{l - l_2}[P_1(a + l_2) + P_2(l_2 - b)] = 52.2 \text{ kN}$$

即

$$P_{\max} = 52.2 \text{ kN}$$

3-8 如图 3-8a 所示，行动式起重机不计平衡锤的重为 $P = 500 \text{ kN}$ ，其重心在离右轨 1.5 m 处。起重机的起重力为 $P_1 = 250 \text{ kN}$ ，突臂伸出离右轨 10 m 。跑车本身重力略去不计，欲使跑车满载时起重机均不致翻倒，求平衡锤的最小重力 P_2 以及平衡锤到左轨的最大距离 x 。

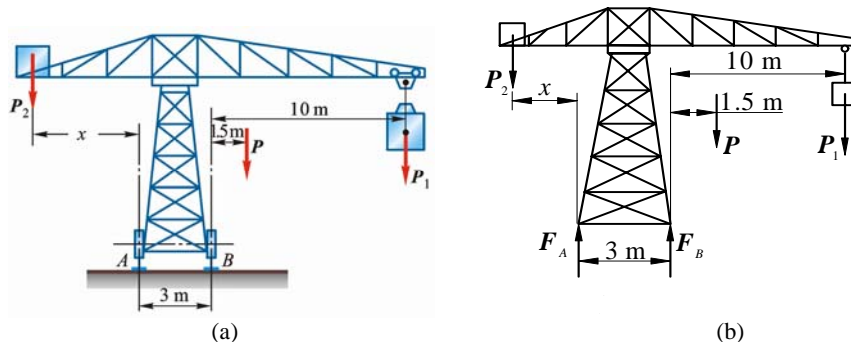


图 3-8

解 起重机，受力如图 3-8b 所示。

(1) 起重机满载时不向右倾倒临界状态下, $F_A = 0$ 。

$$\sum M_B = 0, \quad P_2(x + 3 \text{ m}) - P \times 1.5 \text{ m} - P_1 \times 10 \text{ m} = 0 \quad (1)$$

(2) 起重机空载时向左不倾斜临界状态下, $F_B = 0$

$$\sum M_A = 0, \quad P_2 x - P(3 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$

式 (1)、(2) 联立, 解得

$$P_2 = P_{2\min} = 333 \text{ kN}$$

$$x = x_{\max} = 4.5 \frac{P}{P_2} = 6.75 \text{ m}$$

3-9 飞机起落架, 尺寸如图 3-9a 所示, A, B, C 均为铰链, 杆 OA 垂直于 AB 连线。当飞机等速直线滑行时, 地面作用于轮上的铅直正压力 $F_N = 30 \text{ kN}$, 水平摩擦力和各杆自重都比较小, 可略去不计。求 A, B 两处的约束力。

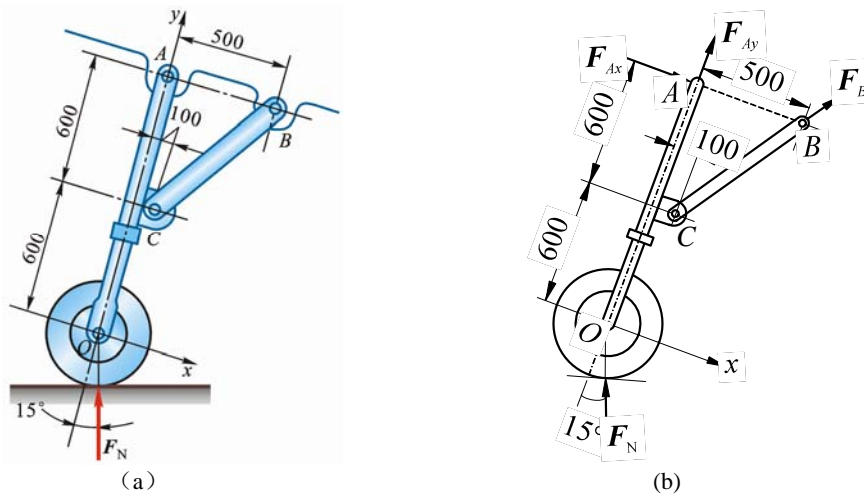


图 3-9

解 如图 3-9b, 杆 BC 为二力杆, F_B 沿 BC 。

$$\sum M_A = 0, \quad -F_N \sin 15^\circ \times 1.2 \text{ m} + F_B \times \frac{0.6}{\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}} \times 0.5 \text{ m} = 0$$

$$F_B = 22.4 \text{ kN (拉)}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_N \sin 15^\circ + F_B \times \frac{0.6}{\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}} = 0$$

$$F_{Ax} = -4.67 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_N \cos 15^\circ + F_B \times \frac{0.6}{\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}} = 0$$

$$F_{Ay} = -47.7 \text{ kN}$$

3-10 水平梁 AB 由铰链 A 和 BC 所支持, 如图 3-10a 所示。在梁上 D 处用销子安装半径为 $r = 0.1 \text{ m}$ 的滑轮。有 1 跨过滑轮的绳子, 其 1 端水平系于墙上, 另 1 端悬挂有重为 $P = 1800 \text{ N}$ 的重物。如 $AD = 0.2 \text{ m}$, $BD = 0.4 \text{ m}$, $\varphi = 45^\circ$, 且不计梁、杆、滑轮和绳的重力。求铰链 A 和杆 BC 对梁的约束力。

解 整体, 坐标及受力如图 3-10b 所示:

$$F_T = P = 1800 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_T r - P(AD + r) + F_{BC} \sin \varphi \cdot (AD + DB) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{P \cdot AD}{(AD + BD) \sin \varphi} = 600\sqrt{2} \text{ N} = 848.5 \text{ N (拉)}$$

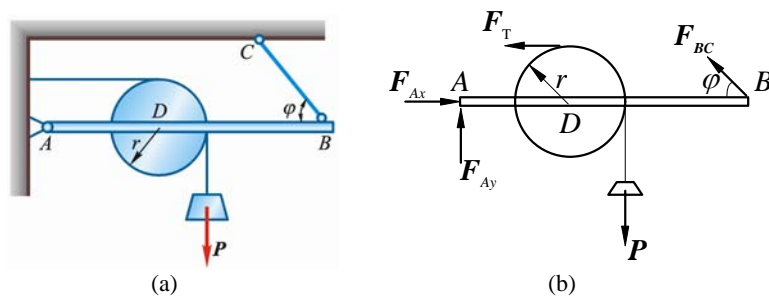


图 3-10

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_T - F_{BC} \cos \varphi &= 0 \\ F_{Ax} &= F_T + F_{BC} \cos \varphi = 2\,400\text{ N} \\ \sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{BC} \sin \alpha - P &= 0 \\ F_{Ay} &= P - F_{BC} \sin \varphi = 1\,200\text{ N}\end{aligned}$$

3-11 如图 3-11a 所示, 组合梁由 AC 和 CD 两段铰接构成, 起重机放在梁上。已知起重机重为 $P_1 = 50\text{ kN}$, 重心在铅直线 EC 上, 起重载荷为 $P_2 = 10\text{ kN}$ 。如不计梁重, 求支座 A、B、D 三处的约束力。

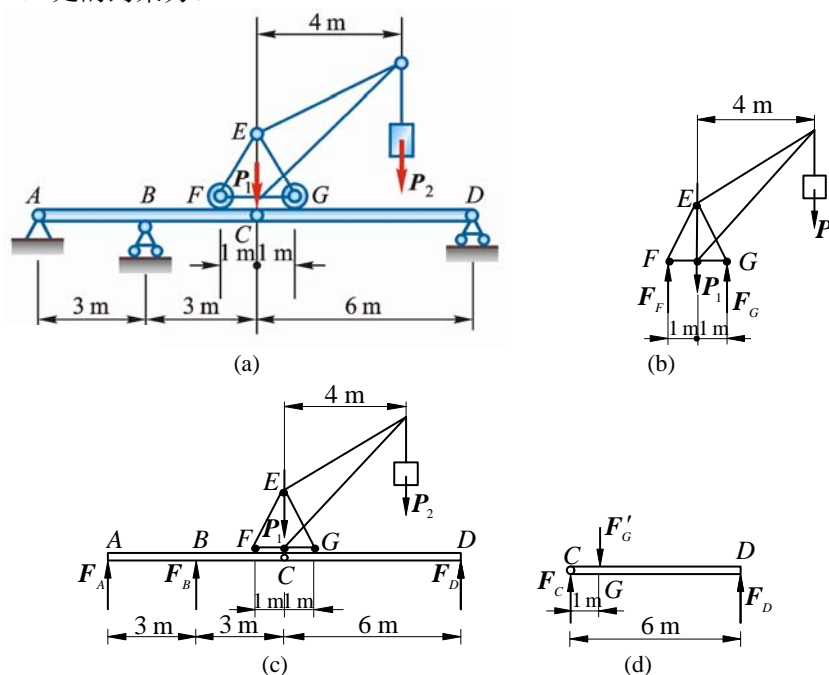


图 3-11

解 (1) 起重机, 受力如图 3-11b 所示

$$\begin{aligned}\sum M_F = 0, F_G \times 2\text{ m} - P_1 \times 1\text{ m} - P_2 \times 5\text{ m} &= 0 \\ F_G &= (P_1 + 5P_2)/2 = 50\text{ kN}\end{aligned}$$

(2) 梁 CD, 受力如图 3-11d 所示

$$\begin{aligned}\sum M_C = 0, -F'_G \times 1\text{ m} + F_D \times 6\text{ m} &= 0 \\ F_D &= F'_G / 6 = 8.33\text{ kN}\end{aligned}$$

(3) 整体, 受力如图 3-11c 所示

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0, F_B \times 3\text{ m} + F_D \times 12\text{ m} - P_1 \times 6\text{ m} - P_2 \times 10\text{ m} &= 0 \\ F_B &= (6P_1 + 10P_2 - 12F_D)/3 = 100\text{ kN} \\ \sum F_y = 0, F_A + F_B - F_D - P_2 - P_1 &= 0 \\ F_A &= P_2 + P_1 - F_B - F_D = -48.3\text{ kN}\end{aligned}$$

3-12 在图 3-12a, 图 3-12b 各连续梁中, 已知 q , M , a 及 θ , 不计梁的自重, 求各连续梁在 A , B , C 三处的约束力。

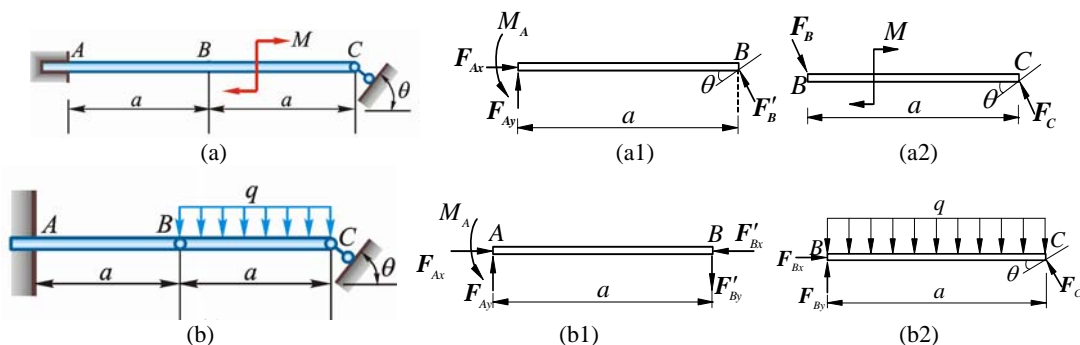


图 3-12

解 (a) (1) 梁 BC , 受力如图 3-12a2 所示。该力系为一力偶系, 则: $F_B = F_C$

$$\sum M = 0, F_C a \cos \theta = M, F_C = F_B = \frac{M}{a \cos \theta}$$

(2) 梁 AB , 受力如图 3-12a1 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = F'_B \sin \theta = \frac{M}{a} \tan \theta$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = -F'_B \cos \theta = \frac{-M}{a}$$

$$\sum M_B = 0, M_A - F_{Ay} a = 0, M_A = -M (\text{顺})$$

解 (b) (1) 梁 BC , 受力如图 3-12b2 所示

$$\sum M_B = 0, -qa^2/2 + F_C \cos \theta \cdot a = 0, F_C = \frac{qa}{2 \cos \theta}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} = F_C \sin \theta = \frac{qa}{2} \tan \theta$$

$$\sum F_y = 0, F_{By} = qa/2$$

(2) 梁 AB , 受力如图 3-12b1 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = F'_{Bx} = \frac{qa}{2} \tan \theta$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = F'_{By} = qa/2$$

$$\sum M_A = 0, M_A = qa^2/2$$

3-13 由 AC 和 CD 构成的组合梁通过铰链 C 连接。它的支承和受力如图 3-13a 所示。已知 $q = 10 \text{ kN/m}$, $M = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 不计梁的自重。求支座 A , B , D 的约束力和铰链 C 受力。

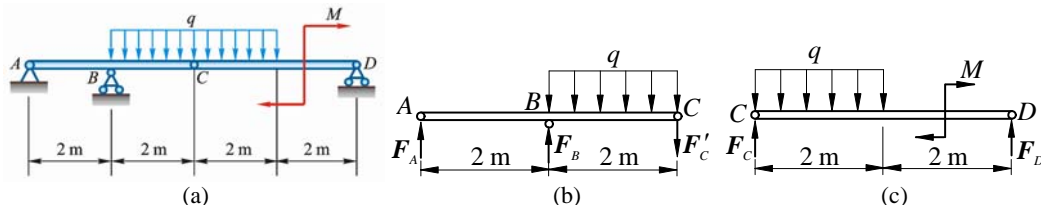


图 3-13

解 (1) 梁 CD , 受力如图 3-13c 所示

$$\sum M_C = 0, -\frac{1}{2} q \times (2 \text{ m})^2 - M + F_D \times 4 \text{ m} = 0$$

$$F_D = (M + 2q)/4 = 15 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_C + F_D - q \times 2 \text{ m} = 0, F_C = 5 \text{ kN}$$

(2) 梁 AC, 受力如图 3-13b 所示

$$\sum M_A = 0, F_B \times 2 \text{ m} - F'_C \times 4 \text{ m} - 2 \text{ m} \cdot q \times 3 \text{ m} = 0$$

$$F_B = (4F'_C + 6q) / 2 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - F'_C - q \times 2 \text{ m} = 0, F_A = -15 \text{ kN}$$

3-14 图 3-14a 所示滑道连杆机构, 在滑道连杆上作用着水平力 F 。已知 $OA = r$, 滑道倾角为 β , 机构重力 and 各处摩擦均不计。求当机构平衡时, 作用在曲柄 OA 上的力偶矩 M 与角 θ 之间的关系。

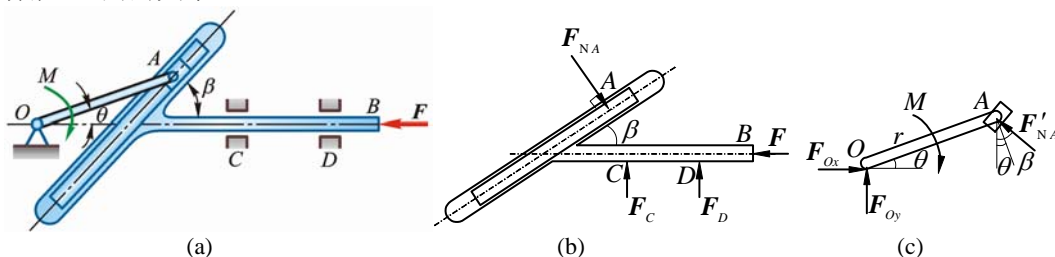


图 3-14

解 (1) 滑道连杆, 受力如图 3-14b 所示

$$\sum F_x = 0, F_{NA} \sin \beta - F = 0, F_{NA} = \frac{F}{\sin \beta} \quad (1)$$

(2) 曲柄 OA 及滑块 A , 受力如图 3-14c 所示

$$\sum M_O = 0, -M + F'_{NA} r \cos(\beta - \theta) = 0 \quad (2)$$

式 (1) 代入 (2) 得

$$M = Fr \frac{\cos(\beta - \theta)}{\sin \beta}$$

3-15 如图 3-15a 所示, 轧碎机的活动颚板 AB 长 600 mm。设机构工作时石块施于板的垂直力 $F = 1000 \text{ N}$ 。又 $BC = CD = 600 \text{ mm}$, $OE = 100 \text{ mm}$ 。不计各杆重量, 试根据平衡条件计算在图示位置时电动机作用力偶矩 M 的大小。

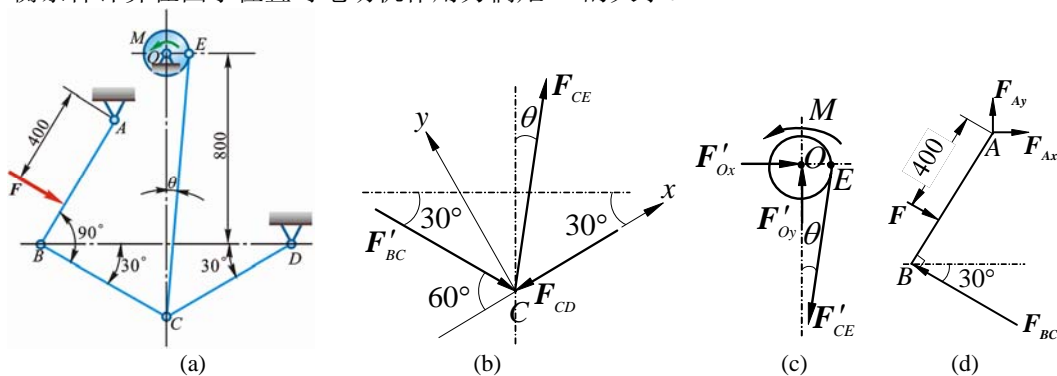


图 3-15

解 (1) 杆 AB , 受力如图 3-15d 所示

$$\sum M_A = 0, F \times 0.4 \text{ m} - F_{BC} \times 0.6 \text{ m} = 0 \quad (1)$$

(2) 节点 C , 受力如图 3-15b 所示

$$\sum F_y = 0, F_{CE} \sin(60^\circ - \theta) - F_{BC} \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

(3) 曲柄 OE , 受力如图 3-15c 所示

$$\sum M_O = 0, M - F_{CE} \cos \theta \cdot OE = 0 \quad (3)$$

式 (1)、(2)、(3) 联立, 解得

$$M = 70.36 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3-16 图 3-16a 所示传动机构，皮带轮 I, II 的半径各为 r_1, r_2 ，鼓轮半径为 r ，物体 A 重力为 P ，两轮的重心均位于转轴上。求匀速提升物 A 时在 I 轮上所需施加的力偶矩 M 的大小。

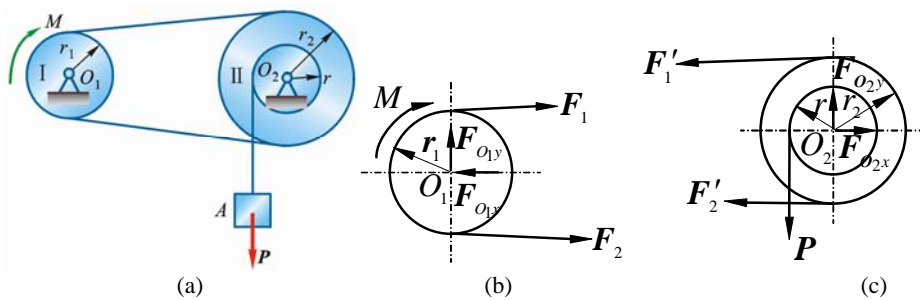


图 3-16

解 (1) 轮 O_1 ，受力如图 3-16b 所示

$$\sum M_{O_1} = 0, (F_2 - F_1)r_1 - M = 0, F_2 - F_1 = M / r_1 \quad (1)$$

(2) 轮 O_2 ，受力如图 3-16c 所示

$$\sum M_{O_2} = 0, (F_2' - F_1')r_2 - Pr = 0, F_2' - F_1' = Pr / r_2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)，得

$$M = Pr r_1 / r_2$$

3-17 图 3-17a 所示为 1 种闸门启闭设备的传动系统。已知各齿轮的半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4 ，鼓轮的半径为 r ，闸门重力为 P ，齿轮的压力角为 θ ，不计各齿轮的自重，求最小的启门力偶矩 M 及轴 O_3 的约束力。

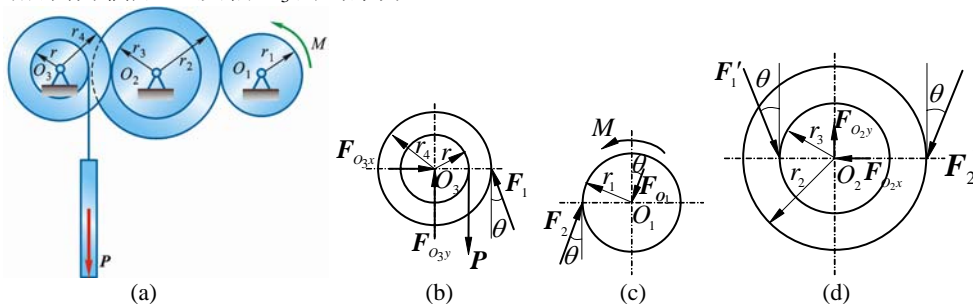


图 3-17

解 (1) 轮 O_3 ，受力如图 3-17b 所示

$$\sum M_{O_3} = 0, -Pr + F_1 \cos \theta \cdot r_4 = 0, F_1 = \frac{Pr}{r_4 \cos \theta} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_{O_3y} - P + F_1 \cos \theta = 0, F_{O_3y} = P(1 - \frac{r}{r_4}) \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0, F_{O_3x} - F_1 \sin \theta = 0, F_{O_3x} = \frac{Pr}{r_4} \tan \theta$$

(2) 轮 O_1 ，受力如图 3-17c 所示

$$\sum M_{O_1} = 0, -F_2 \cos \theta \cdot r_1 + M = 0, F_2 = \frac{M}{r_1 \cos \theta} \quad (3)$$

(3) 轮 O_2 ，受力如图 3-17d 所示

$$\sum M_{O_2} = 0, -F_1' \cos \theta \cdot r_3 = F_2' \cos \theta \cdot r_2, F_1' r_3 = F_2' r_2 \quad (4)$$

式 (1)、(2)、(3) 代入 (4)，得

$$\frac{Pr}{r_4 \cos \theta} \cdot r_3 = \frac{M}{r_1 \cos \theta} \cdot r_2, M = \frac{Pr r_1 r_3}{r_2 r_4}$$

3-18 如图 3-18a 所示，三铰拱由两半拱和 3 个铰链 A, B, C 构成，已知每半拱重为

$P = 300 \text{ kN}$, $l = 32 \text{ m}$, $h = 10 \text{ m}$ 。求支座 A , B 的约束力。

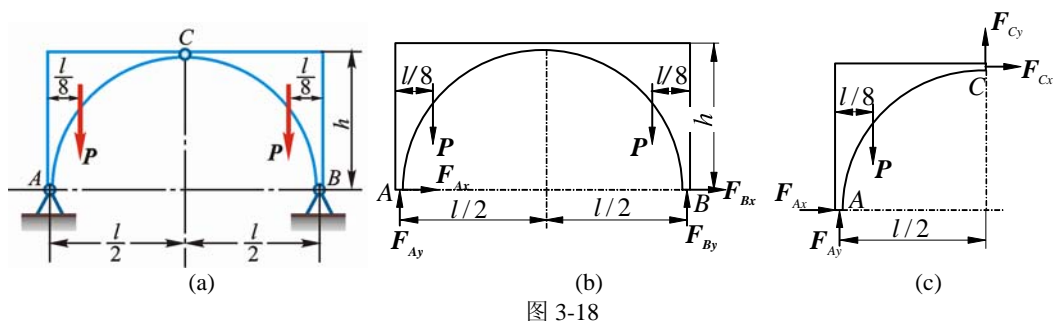


图 3-18

解 (1) 整体, 受力如图 3-18b 所示

$$\sum M_A = 0, F_{By}l - P\frac{l}{8} - P(l - \frac{l}{8}) = 0, F_{By} = P = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - P - P = 0, F_{Ay} = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} + F_{BC} = 0 \quad (1)$$

(2) 左半拱 AC , 受力如图 3-18c 所示

$$\sum M_C = 0, P(\frac{l}{2} - \frac{l}{8}) + F_{Ax}h - F_{Ay}\frac{l}{2} = 0, F_{Ax} = \frac{lP}{8h} = 120 \text{ kN}$$

将 F_{Ax} 代入式 (1), 得

$$F_{Bx} = -F_{Ax} = -120 \text{ kN}$$

3-19 构架由杆 AB , AC 和 DF 铰接而成, 如图 3-19a 所示, 在杆 DEF 上作用 1 力偶矩为 M 的力偶。各杆重力不计, 求杆 AB 上铰链 A , D 和 B 受力。

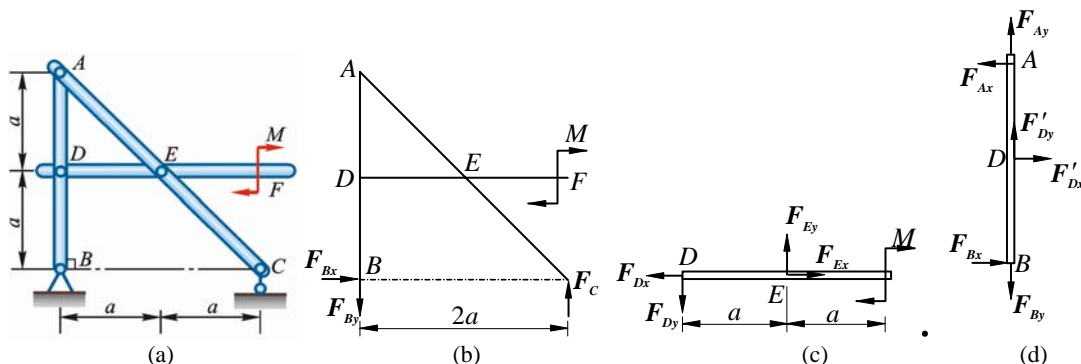


图 3-19

解 (1) 整体, 受力如图 3-19b 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_C = 0, F_{By} = \frac{M}{2a} (\downarrow)$$

(2) 杆 DE , 受力如图 3-19c 所示

$$\sum M_E = 0, F_{Dy} = \frac{M}{a} (\downarrow)$$

(3) 杆 ADB , 受力如图 3-19d 所示

$$\sum M_A = 0, F_{Dx} = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = -\frac{M}{2a} (\downarrow)$$

3-20 构架由杆 AB , AC 和 DF 组成, 如图 3-20a 所示。杆 DF 上的销子 E 可在杆 AC 的光滑槽内滑动, 不计各杆的重量。在水平杆 DF 的一端作用铅直力 F , 求铅直杆 AB 上铰

链 A , D 和 B 受力。

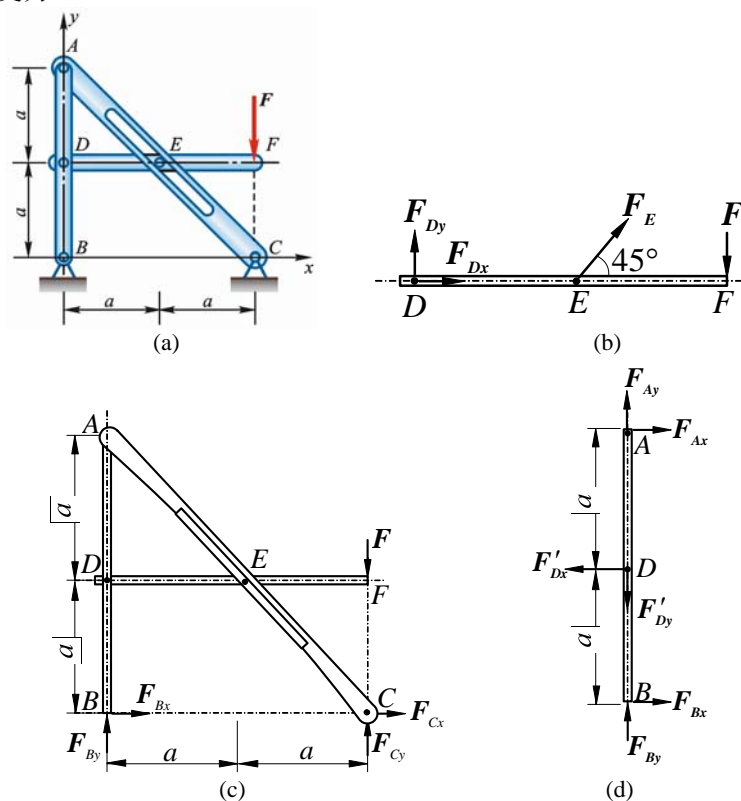


图 3-20

解 (1) 杆 DEF , 受力如图 3-20b 所示

$$\sum M_D = 0, \quad F_E \sin 45^\circ \cdot a - F \cdot 2a = 0, \quad F_E = 2\sqrt{2}F$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Dx} + F_E \cos 45^\circ = 0, \quad F_{Dx} = -2F$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Dy} + F_E \sin 45^\circ - F = 0, \quad F_{Dy} = -F$$

(2) 整体, 受力如图 3-20c 所示

$$\sum M_C = 0, \quad F_{By} = 0$$

(3) 杆 ADB , 受力如图 3-20d 所示

$$\sum M_B = 0, \quad F'_{Dx} \cdot a - F_{Ax} \cdot 2a = 0, \quad F_{Ax} = -F$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F'_{Dy} = 0, \quad F_{Ay} = -F$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{Bx} - F'_{Dx} = 0, \quad F'_{Dx} = -F$$

3-21 图 3-21a 所示构架中, 物体重 $P=1200\text{ N}$, 由细绳跨过滑轮 E 而水平系于墙上, 尺寸如图。不计杆和滑轮的重力, 求支承 A 和 B 的约束力, 以及杆 BC 的内力 F_{BC} 。

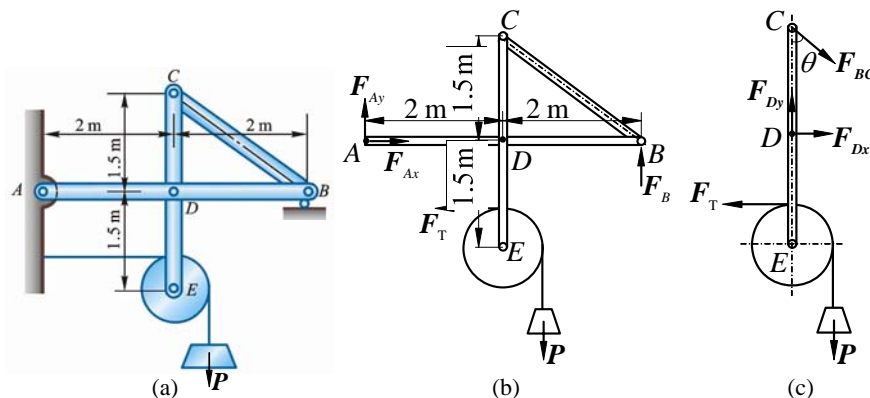


图 3-21

解 (1) 整体, 受力如图 3-21b 所示。绳索拉力

$$F_T = P = 1200 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_T = 0, F_{Ax} = F_T = 1200 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0, F_B \times 4 \text{ m} - P(2 \text{ m} + r) - F_T(1.5 \text{ m} - r) = 0$$

$$F_B = (2P + Pr + 1.5F_T - F_T r) / 4 = 7P/8 = 1050 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ax} + F_B - P = 0, F_{Ay} = 150 \text{ N}$$

(2) 杆 CE, 滑轮 E 及重物 P 为研究对象, 受力如图 3-21 图 c 所示

$$\sum M_D = 0, -F_{BC} \sin \theta \times 1.5 - P \cdot r - F_T(1.5 - r) = 0$$

$$F_{BC} = -\frac{P}{\sin \theta} = -\frac{1200 \text{ N}}{2/\sqrt{2^2 + 1.5^2}} = -1500 \text{ N (压)}$$

3-22 图 3-22a 所示 2 等长杆 AB 与 BC 在点 B 用铰链连接, 又在杆的 D、E 两点连 1 弹簧。弹簧的刚度系数为 k, 当距离 AC 等于 a 时, 弹簧内拉力为零。点 C 作用 1 水平力 F, 设 AB = l, BD = b, 不计杆重, 求系统平衡时距离 AC 之值。

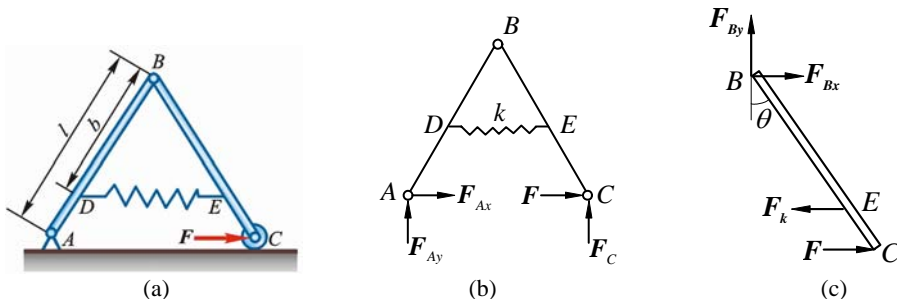


图 3-22

解 由相似三角形对应边成比例, 知弹簧原长

$$l_0 = \frac{ab}{l}$$

设平衡时 AC = x, 此时弹簧伸长:

$$\delta = \frac{b}{l}(x - a), F_k = \delta k = \frac{bk}{l}(x - a)$$

(1) 整体, 受力如图 3-22b 所示

$$\sum M_A = 0, F_C = F_{Cy} = 0$$

(2) 杆 BC, 受力如图 3-22c 所示

$$\sum M_B = 0, F_k b \cos \theta = Fl \cos \theta$$

即

$$\frac{bk}{l}(x - a) \cdot b = Fl, AC = x = \frac{Fl^2}{kb^2} + a$$

3-23 图 3-23a 所示构架中, 力 F = 40 kN, 各尺寸如图, 不计各杆重力, 求铰链 A、B、C 处受力。

解 (1) 杆 DEF, 受力如图 3-23b 所示

$$\sum M_F = 0, F_{CD} \times 4 \text{ m} - F_{BE} \times 2 \text{ m} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (1)$$

(2) 杆 ABC, 受力如图 3-23c 所示

$$\sum M_A = 0, F'_{DC} \times 6 \text{ m} - F \times 4 \text{ m} - F'_{BE} \times 2 \text{ m} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (2)$$

式 (1)、(2) 联立, 解得

$$F_{BE} = 160\sqrt{2} \text{ kN (拉)}, F_{CD} = 80 \text{ kN (压)}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} = -F'_{BE} \cos 45^\circ = -160 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F'_{BE} \cos 45^\circ - F'_{CD} + F = 0, \quad F_{Ax} = -120 \text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

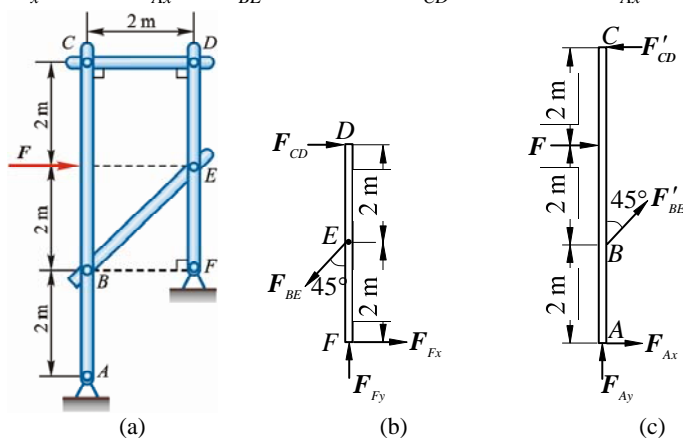


图 3-23

3-24 在图 3-24a 所示构架中, A, C, D, E 处为铰链连接, 杆 BD 上的销钉 B 置于杆 AC 的光滑槽内, 力 $F=200 \text{ N}$, 力偶矩 $M=100 \text{ N} \cdot \text{m}$, 不计各构件重力, 各尺寸如图, 求 A、B、C 处受力。

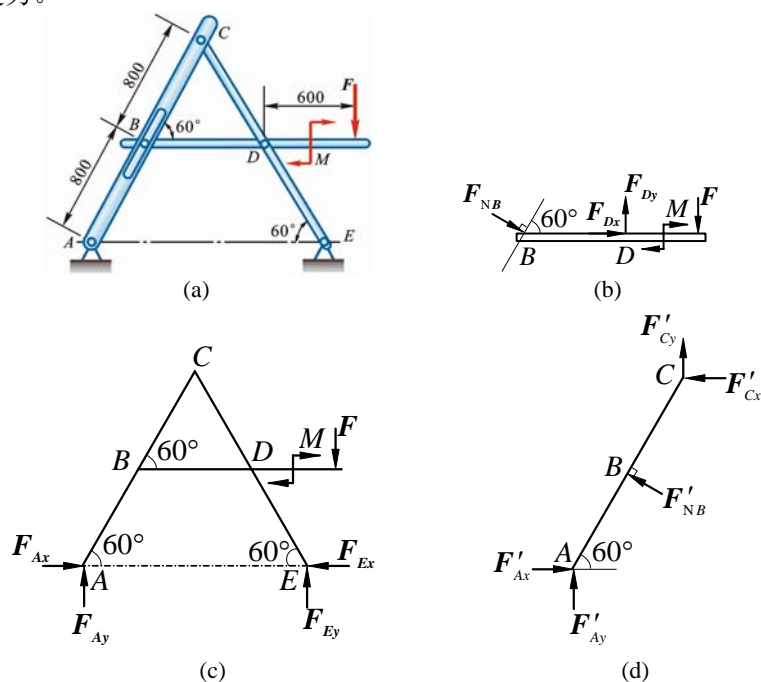


图 3-24

解 (1) 杆 BD, 受力如图 3-24b 所示

$$\sum M_D = 0, \quad F_{NB} \cos 60^\circ \times 0.8 \text{ m} - M - F \times 0.6 \text{ m} = 0, \quad F_{NB} = 550 \text{ N}$$

(2) 整体, 受力如图 3-24c 所示

$$\sum M_E = 0, \quad -F_{Ay} \times 1.6 \text{ m} - M - F(0.6 - 0.8 \cos 60^\circ) \text{ m} = 0, \quad F_{Ay} = -87.5 \text{ N}$$

(3) 杆 AC, 受力如图 3-24d 所示

$$\sum M_C = 0, \quad F_{Ay} \times 0.8 \text{ m} + F_{Ax} \times 1.6 \text{ m} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - F'_{NB} \times 0.8 \text{ m} = 0, \quad F_{Ax} = 267 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F'_{NB} \cos 30^\circ - F_{Cx} = 0, \quad F_{Cx} = -209 \text{ N} \quad (\rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{Cy} + F'_{NB} \cos 60^\circ = 0, \quad F_{Cy} = -187.5 \text{ N} \quad (\downarrow)$$

3-25 如图 3-25a 所示, 用 3 根杆连接成一构架, 各连接点均为铰链, B 处的接触表面光滑, 不计各杆的重力。图中尺寸单位为 m。求铰链 D 处受力。

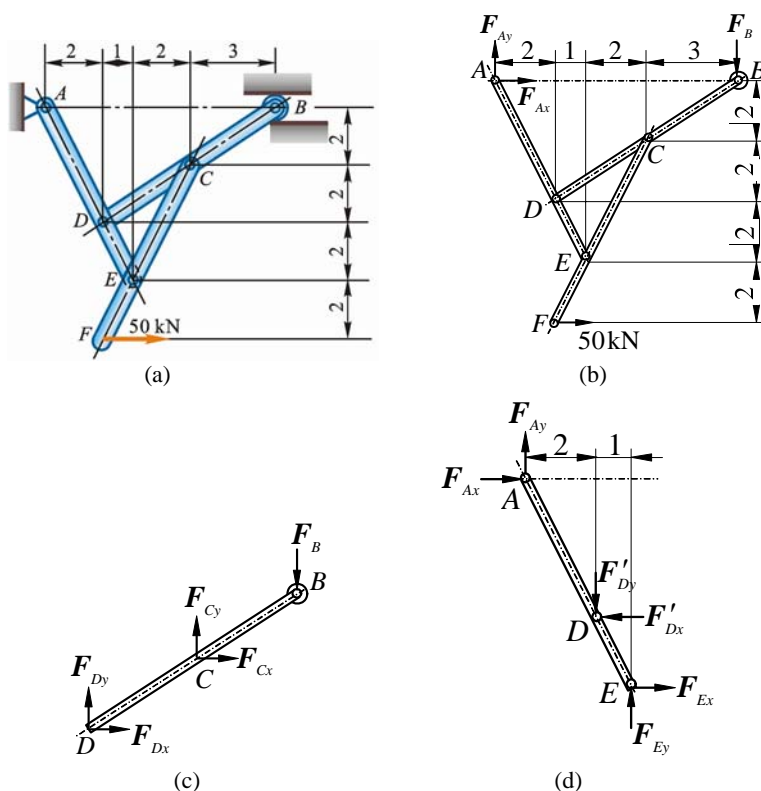


图 3-25

解 (1) 整体, 受力如图 3-25b 所示

$$\sum M_A = 0, \quad 50 \text{ kN} \times 8 \text{ m} - F_B \times 8 \text{ m} = 0, \quad F_B = 50 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + 50 \text{ kN} = 0, \quad F_{Ax} = -50 \text{ kN} \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_B = 0, \quad F_{Ay} = 50 \text{ kN} \quad (3)$$

(2) 杆 DB, 受力如图 3-25c 所示

$$\sum M_C = 0, \quad F_{Dx} \times 2 \text{ m} - F_{Dy} \times 3 \text{ m} - F_B \times 3 \text{ m} = 0 \quad (4)$$

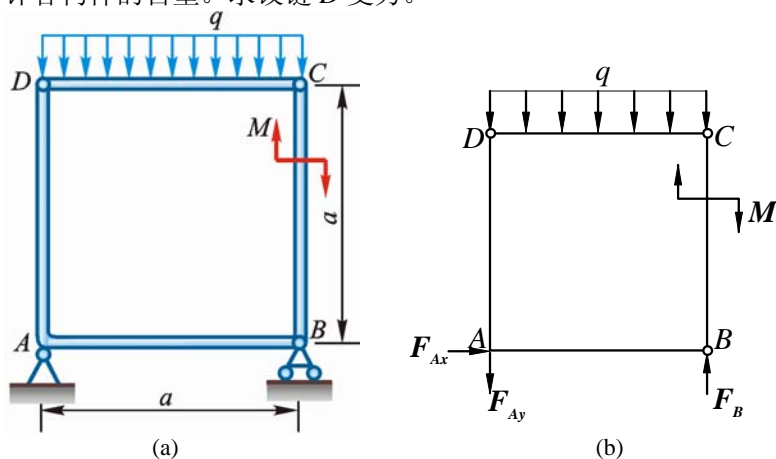
(3) 杆 AE, 受力如图 3-25d 所示

$$\sum M_E = 0, \quad -F_{Ay} \times 3 \text{ m} - F_{Ax} \times 6 \text{ m} + F'_{Dx} \times 2 \text{ m} + F'_{Dy} \times 1 \text{ m} = 0 \quad (5)$$

式 (1)、(2)、(3) 代入 (4)、(5), 解得

$$F_{Dy} = -75 \text{ kN}, \quad F_{Dx} = -37.5 \text{ kN}$$

3-26 图 3-26a 所示结构由直角弯杆 DAB 与直杆 BC、CD 铰链而成, 并在 A 处与 B 处用固定铰支座和可动铰支座固定。杆 DC 受均布载荷 q 的作用, 杆 BC 受矩为 $M = qa^2$ 的力偶作用。不计各构件的自重。求铰链 D 受力。



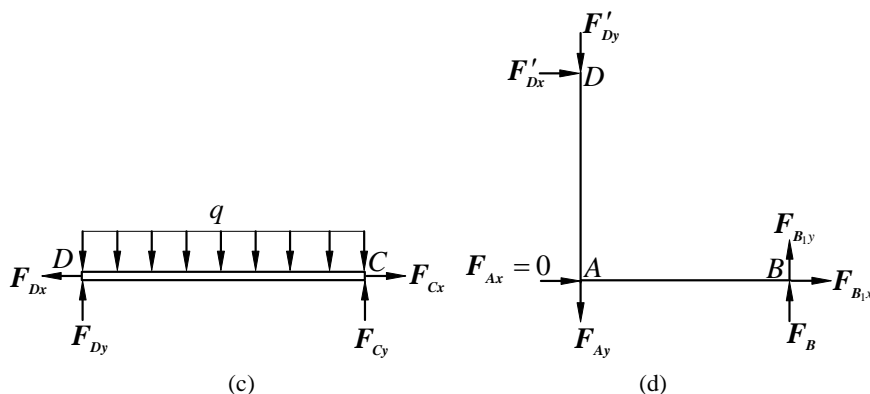


图 3-26

解 (1) 整体, 受力如图 3-26b 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_B = 0, F_{Ay}a - M + qa^2/2 = 0, F_{Ay} = qa/2$$

(2) 杆 CD, 受力如图 3-26c 所示

$$\sum M_C = 0, F_{Dy} = qa/2$$

(3) 直角杆 DAB, 受力如图 3-26d 所示

$$\sum M_B = 0, F_{Ay}a + F'_{Dy}a - F'_{Dx}a = 0$$

$$F'_{Dx} = qa, F_D = \sqrt{F'^2_{Dx} + F'^2_{Dy}} = \sqrt{5}qa/2$$

3-27 在图 3-27a 所示构架中, 各杆单位长度的重量为 30 N/m, 载荷 $P = 1000$ N, A 处为固定端, B, C, D 处为铰链。求固定端 A 处及铰链 B, C 处的约束力。

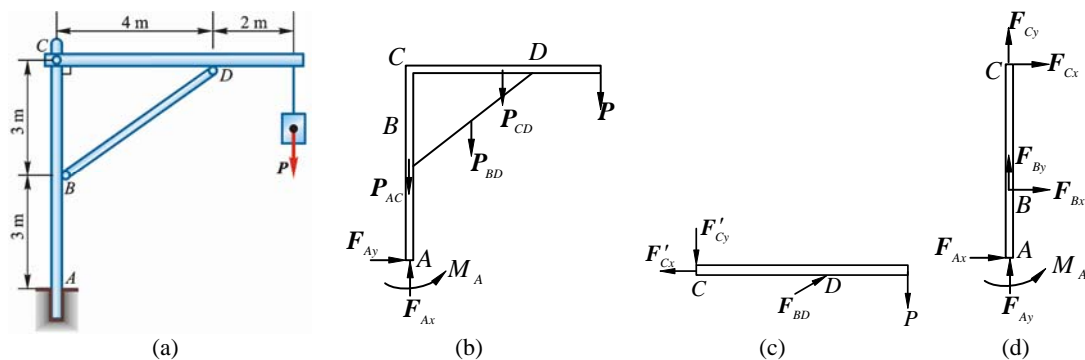


图 3-27

解 (1) 整体, 受力如图 3-27b 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - P - P_{CD} - P_{BD} - P_{AC} = 0, F_{Ay} = 15.1 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0, M_A - P \times 6 \text{ m} - P_{CD} \times 3 \text{ m} - P_{BD} \times 2 \text{ m} = 0, M_A = 68.4 \text{ kN}$$

(2) 杆 CD, 受力如图 3-27c 所示

$$\sum M_D = 0, F_{Cy} \times 4 \text{ m} + P_{CD} \times 1 \text{ m} - P \times 2 \text{ m} = 0, F_{Cy} = 4.55 \text{ kN}$$

(3) 杆 ABC, 受力如图 3-27d 所示。由已知

$$\sum M_C = 0, F_{Bx} \times 3 \text{ m} + M_A = 0, F_{Bx} = -22.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} + F_{Cx} = 0, F_{Cx} = 22.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{Cy} + F_{By} + F_{Ay} - P_{AC} = 0, F_{By} = -17.85 \text{ kN}$$

*3-28 图 3-28a 所示结构位于铅垂面内, 由杆 AB, CD 及斜 T 形杆 BCE 组成, 不计各杆的自重。已知载荷 F_1 , F_2 和尺寸 a , 且 $M = F_1a$, F_2 作用于销钉 B 上, 求: (1) 固定端 A 处的约束力; (2) 销钉 B 对杆 AB 及 T 形杆的作用力。

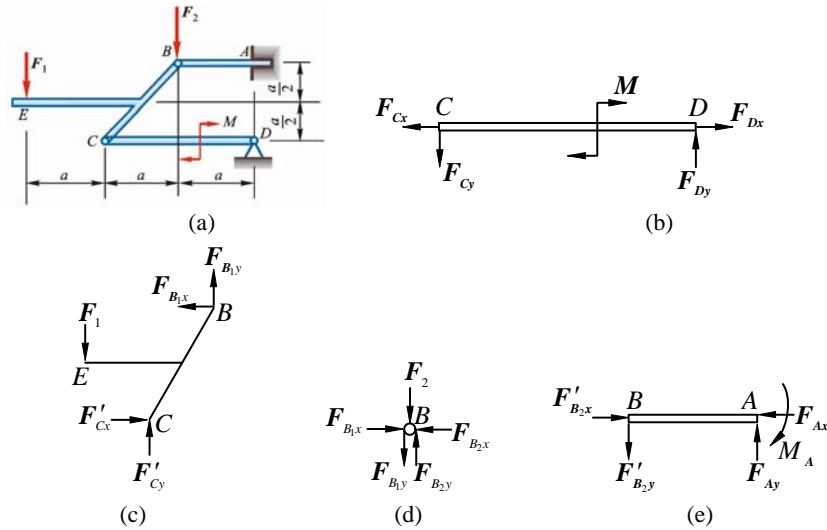


图 3-28

解 (1) 杆 CD , 受力如图 3-28b 所示

$$\sum M_D = 0, F_y \times 2a - M = 0, F_{Cy} = \frac{F_1 a}{2a} = \frac{F_1}{2}$$

(2) T 形杆 BCE , 受力如图 3-28c 所示

$$\sum M_B = 0, F_1 \times 2a - F'_{Cy} \cdot a + F'_{Cx} \cdot a = 0, F'_{Cx} = 3F_1 / 2$$

$$\sum F_x = 0, F_{B1x} = 3F_1 / 2$$

$$\sum F_y = 0, F'_{Cy} - F_1 + F_{B1y} = 0, F_{B1y} = F_1 / 2$$

(3) 销钉 B , 受力如图 3-28d 所示

$$\sum F_x = 0, F_{B2x} = F'_{B2x} = 3F_1 / 2$$

$$\sum F_y = 0, F_{B2y} - F'_{B2y} - F_2 = 0, F_{B2y} = F_1 / 2 + F_2$$

(4) 悬臂梁 AB , 受力如图 3-28e 所示

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = F'_{B2x} = 3F_1 / 2$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = F'_{B2y} = F_1 / 2 + F_2$$

$$\sum M_A = 0, -M_A + F'_{B2y} \cdot a = 0, M_A = (F_1 / 2 + F_2)a \text{ (顺)}$$

***3-29** 图 3-29a 所示构架, 由直杆 BC , CD 及直角弯杆 AB 组成, 各杆自重不计, 载荷分布及尺寸如图。销钉 B 穿透 AB 及 BC 两构件, 在销钉 B 上作用 1 铅垂力 F 。已知 q , a , M , 且 $M = qa^2$ 。求固定端 A 的约束力及销钉 B 对杆 CB , 杆 AB 的作用力。

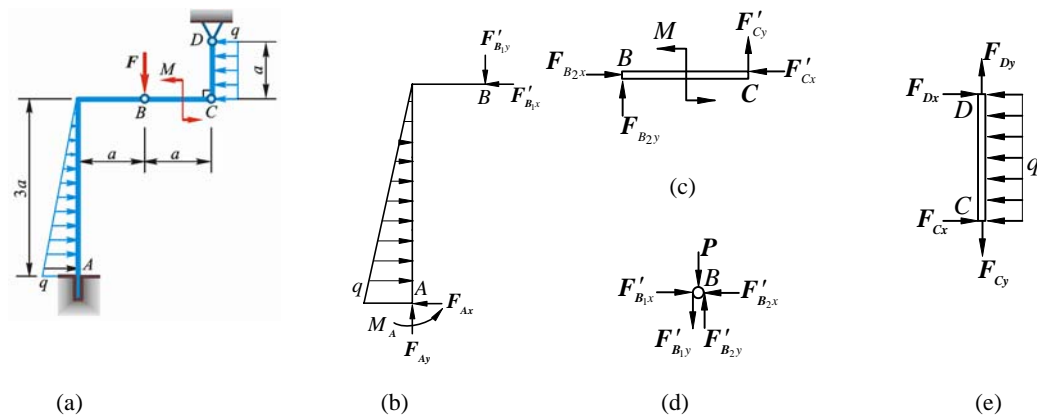


图 3-29

解 (1) 杆 CD , 受力如图 3-29e 所示

$$\sum M_D = 0, F_{Cx} = qa/2$$

(2) 杆 BC , 受力如图 3-29c 所示

$$\sum M_C = 0, F_{B2y} = M/a = qa$$

$$\sum F_x = 0, F_{B2x} = F'_{Cx} = qa/2$$

(3) 销钉 B , 受力如图 3-29d 所示

$$\sum F_x = 0, F'_{B1x} = F'_{B2x} = qa/2$$

$$\sum F_y = 0, F'_{B1y} = F + F'_{B2y} = F + qa$$

(4) 刚架 AB , 受力如图 3-29b 所示

$$\sum F_x = 0, \frac{1}{2}q \times 3a - F_{B1x} - F_{Ax} = 0, F_{Ax} = qa \quad (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} = F_{B1y} = F + qa \quad (\uparrow)$$

$$\sum M_A = 0, -\frac{3qa}{2} \cdot a - F_{B1y} \cdot a + F_{B1x} \times 3a + M_A = 0$$

$$M_A = (F + qa)a \quad (\text{逆})$$

3-30 由直角曲杆 ABC , DE , 直杆 CD 及滑轮组成的结构如图 3-30a 所示, 杆 AB 上作用有水平均布载荷 q 。不计各构件的重力, 在 D 处作用 1 铅垂力 F , 在滑轮上悬吊一重为 P 的重物, 滑轮的半径 $r = a$, 且 $P = 2F$, $CO = OD$ 。求支座 E 及固定端 A 的约束力。

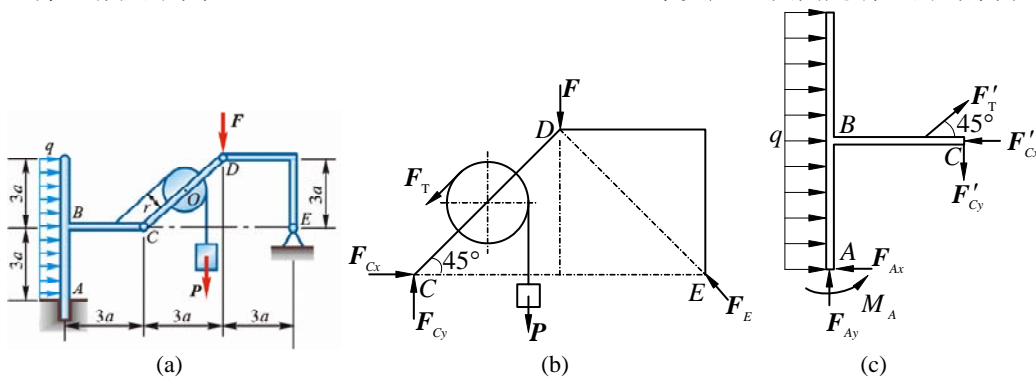


图 3-30

解 (1) DE 为二力杆, 取 CD +滑轮+重物 P + DE 为研究对象, 受力如图 3-30b 所示, 且

$$F_T = P = 2F$$

$$\sum M_C = 0, F_E \times 3a\sqrt{2} - F \times 3a - P(3a/2 + r) + F_T r = 0, F_E = \sqrt{2}F$$

$$\sum F_x = 0, F_{Cx} - F_E \cos 45^\circ - F_T \cos 45^\circ = 0, F_{Cx} = (\sqrt{2} + 1)F$$

$$\sum F_y = 0, F_{Cy} - F_T \frac{\sqrt{2}}{2} - P - F + F_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, F_{Cy} = (2 + \sqrt{2})F$$

(2) 直角曲杆 ABC , 受力如图 3-30c 所示

$$\sum F_x = 0, q \times 6a - F_{Ay} - F'_{Cx} + F'_T \cos 45^\circ = 0, F_{Ax} = 6qa - F$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F'_{Cy} + F_T \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, F_{Ax} = 2F$$

$$\sum M_A = 0, M_A - 6qa \cdot 3a + F'_{Cx} 3a - F'_{Cy} 3a - F'_T r = 0$$

$$M_A = 5Fa + 18qa^2$$

3-31 构架尺寸如图 3-31a 所示 (尺寸单位为 m), 不计各杆的自重, 载荷 $F = 60 \text{ kN}$ 。求铰链 A , E 的约束力和杆 BD , BC 的内力。

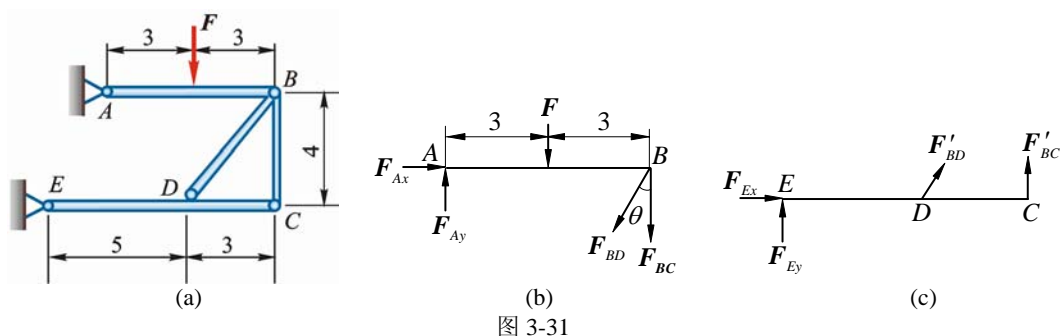


图 3-31

解 BD, BC 为二力杆

(1) 梁 AB , 受力如图 3-31b 所示

$$\cos \theta = 4/5, \quad \sin \theta = 3/5$$

$$\sum M_B = 0, \quad F_{Ay} = F/2 \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{BD} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F + F_{BC} + F_{BD} \cos \theta = 0 \quad (3)$$

(2) 梁 EDC , 受力如图 3-31c 所示

$$\sum M_E = 0, \quad F_{BC} \times 8 \text{ m} + F_{BD} \cos \theta \times 5 \text{ m} = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ex} - F_{BD} \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ey} - F_{BD} \cos \theta - F_{BC} = 0 \quad (6)$$

式 (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6) 联立, 解得

$$F_{BC} = -5F/6; \quad F_{BD} = 5F/3; \quad F_{Ax} = -F, \quad F_{Ay} = F_{By} = F/2; \quad F_{Ex} = F$$

即 $F_{BC} = -50 \text{ kN}; \quad F_{BD} = 100 \text{ kN}; \quad F_{Ax} = -60 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 30 \text{ kN};$

$$F_{Ex} = 60 \text{ kN}, \quad F_{Ey} = 30 \text{ kN}$$

3-32 构架尺寸如图 3-32a 所示 (尺寸单位为 m), 不计各构件自重, 载荷 $F_1 = 120 \text{ kN}$, $F_2 = 75 \text{ kN}$ 。求杆 AC 及 AD 所受的力。

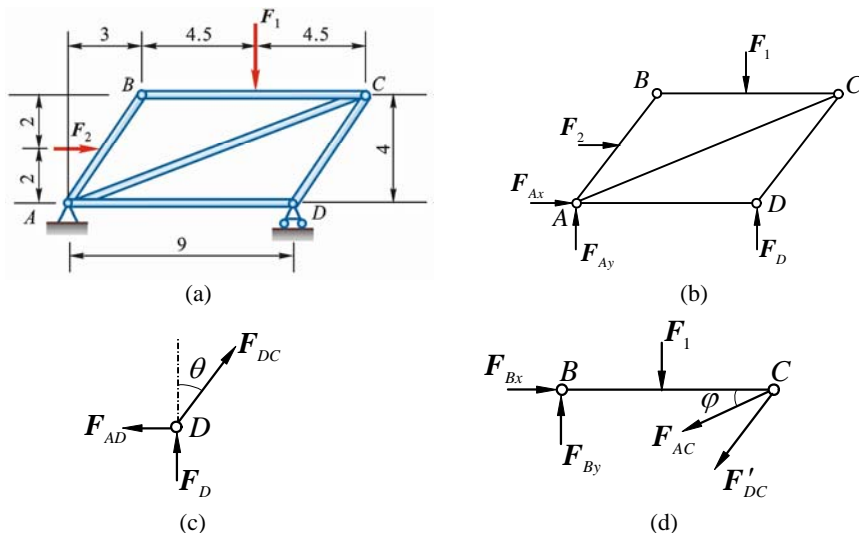


图 3-32

解 (1) 整体, 受力如图 3-32b 所示

$$\sum M_A = 0, \quad F_D \times 9 \text{ m} - F_1 \times 7.5 \text{ m} - F_2 \times 2 \text{ m} = 0, \quad F_D = 116 \frac{2}{3} \text{ kN}$$

(2) 节点 D , 受力如图 3-32c 所示, $\cos \theta = 4/5$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{DC} \sin \theta + F_D = 0, \quad F_{DC} = \frac{-875}{6} \text{ kN} = 145.83 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{DC} \cos \theta - F_{AD} = 0, F_{AD} = -87.5 \text{ kN (压)}$$

(3) 梁 BC , 受力如图 3-32d 所示, $\tan \varphi = \frac{1}{3}$

$$\sum M_B = 0, F_1 \times 4.5 \text{ m} + F_{AC} \sin \varphi \times 9 \text{ m} + F_{CD} \sin \theta \times 9 \text{ m} = 0$$

$$F_{AC} = 179.2 \text{ kN (拉)}$$

3-33 图 3-33a 所示挖掘机计算简图中, 挖斗载荷 $P = 12.25 \text{ kN}$, 作用于 G 点, 尺寸如图。不计各构件自重, 求在图示位置平衡时杆 EF 和 AD 所受的力。

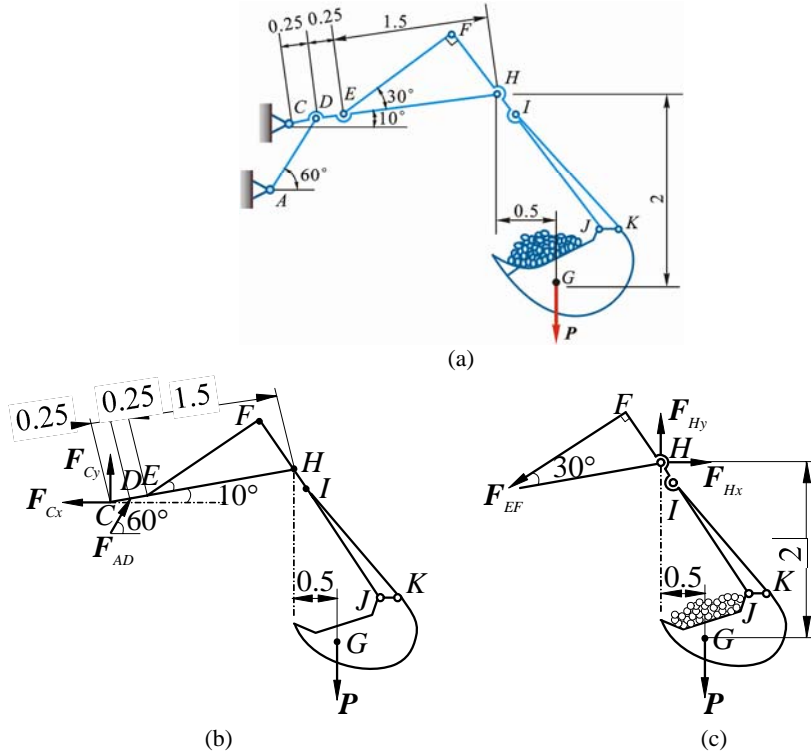


图 3-33

解 (1) 整体, 受力如图 3-33b 所示

$$\sum M_C = 0, F_{AD} \cos 40^\circ \times 0.25 \text{ m} - P(0.5 + 2 \cos 10^\circ) \text{ m} = 0, F_{AD} = 158 \text{ kN (压)}$$

(2) 考虑 $FHIJK$ 及挖斗的平衡, 受力如图 3-33c 所示

$$\sum M_H = 0, P \times 0.5 \text{ m} - F_{EF} \times 1.5 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 0, F_{EF} = 8.17 \text{ kN (拉)}$$

3-34 平面悬臂桁架所受的载荷如图 3-34a 所示。求杆 1、2 和 3 的内力。

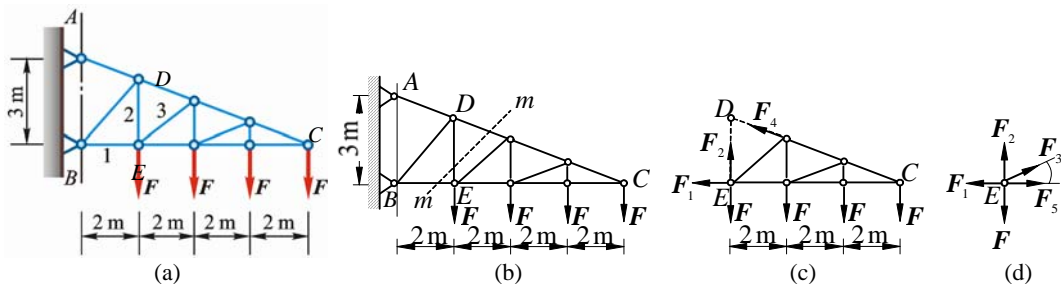


图 3-34

解 (1) 桁架沿截面 mm 截开 (图 3-34b), 取右半部, 得受力图 3-34c。

$$\sum M_C = 0, -F_2 \times 6 \text{ m} - F \times 6 \text{ m} + F \times 4 \text{ m} + F \times 2 \text{ m} = 0, F_2 = 2F \text{ (拉)}$$

$$\sum M_D = 0, -F_1 \times \frac{9}{4} \text{ m} - F \times 2 \text{ m} - F \times 4 \text{ m} - F \times 6 \text{ m} = 0, F_1 = -5.33F \text{ (压)}$$

(2) 节点 E , 受力如图 3-34d 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_2 - F + F_3 \sin \alpha = 0$$

$$F_3 = \frac{1}{\sin \alpha} (F - F_2) = \frac{-F}{\frac{3}{2}} = -\frac{5}{3} F \quad (\text{压})$$

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

3-35 平面桁架的支座和载荷如图 3-35a 所示。ABC 为等边三角形，且 AD=DB。求杆 CD 的内力 F 。

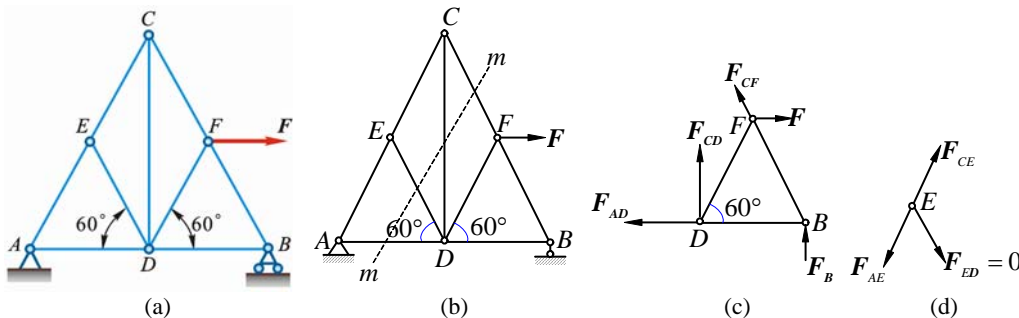


图 3-35

解 (1) 节点 E，受力如图 3-35d 所示，因 F_{AE} 与 F_{CE} 同 1 条直线上，故

$$F_{ED} = 0$$

(2) 桁架沿截面 mm 截开（图 3-35b），取右半部，得受力图 3-35c

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{CD} \cdot DB - F \cdot DF \sin 60^\circ = 0$$

$$F_{CD} = -F \frac{DF}{DB} \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} F = -0.866 F \quad (\text{压})$$

3-36 平面桁架尺寸如图 3-36a 所示（尺寸单位为 m），载荷 $F_1 = 240 \text{ kN}$ ， $F_2 = 720 \text{ kN}$ 。试用最简便的方法求杆 BD 及 BE 的内力。

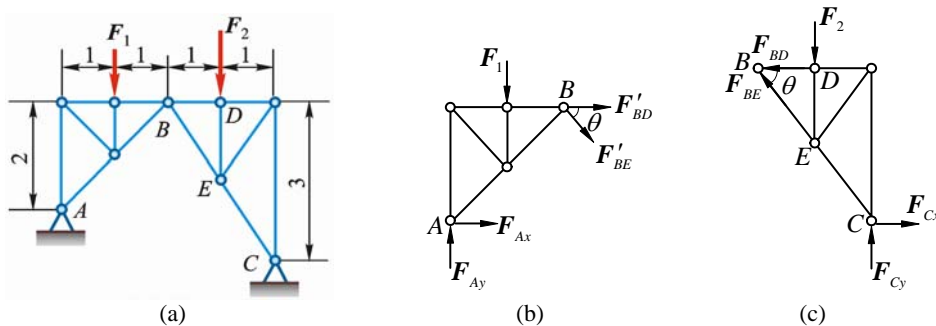


图 3-36

解 将杆 BD，BE 截断，得受力图 3-36b 和 3-36c。由受力图 3-36c 得：

$$\cos \theta = 2/\sqrt{13}, \quad \sin \theta = 3/\sqrt{13}$$

$$\sum M_C = 0, \quad F_{BD} \times 3 \text{ m} + F_2 \times 1 \text{ m} = 0, \quad F_{BD} = -240 \text{ kN} \quad (\text{压})$$

再由受力图 3-36b 得：

$$\sum M_A = 0, \quad F_1 \times 1 \text{ m} + F_{BD}' \times 2 \text{ m} + F_{BE}' \cos \theta \times 2 \text{ m} + F_{BE}' \sin \theta \times 2 \text{ m} = 0$$

$$F_{BE}' = 86.53 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

3-37 桁架受力如图 a 所示，已知 $F_1 = 10 \text{ kN}$ ， $F_2 = F_3 = 20 \text{ kN}$ 。求桁架中杆 4、5、7、10 的内力。

解 (1) 整体，受力如图 3-37b 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_3 \sin 30^\circ = 0, \quad F_{Ax} = F_3 \sin 30^\circ = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0, \quad -F_1 \cdot a - F_2 \times 2a - F_3 \cos 30^\circ + F_B \times 4a = 0$$

$$F_B = \frac{1}{4}(F_1 + 2F_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}F_3) = 25.5 \text{ kN}$$

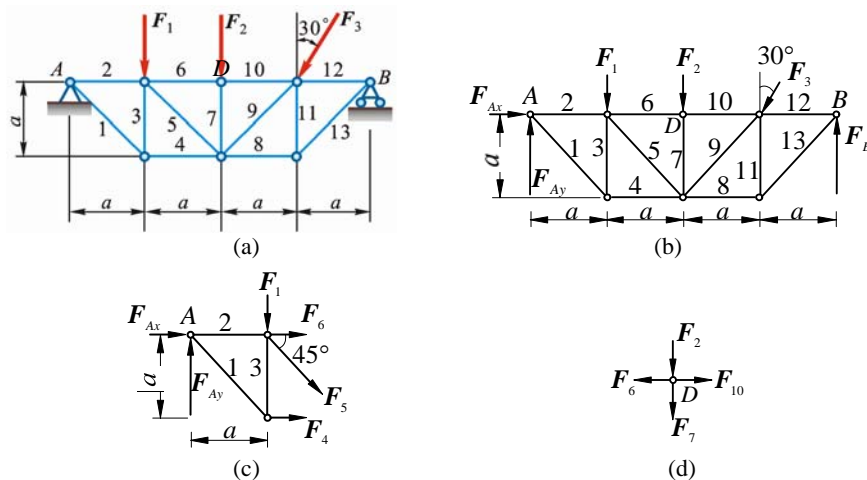


图 3-37

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_B - F_1 - F_2 - F_3 \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{Ay} = F_1 + F_2 + F_3 \cos 30^\circ - F_B = 21.8 \text{ kN}$$

(2) 桁架沿杆 4、5、6 截开，取左半部，得受力图 3-37c

$$\sum M_C = 0, \quad F_4 \cdot a - F_{Ay} \cdot a = 0, \quad F_4 = F_{Ay} = 21.8 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

$$\sum F_{Ay} = 0, \quad F_{Ay} - F_1 - F_5 \sin 45^\circ = 0, \quad F_5 = 16.7 \text{ kN} \quad (\text{拉})$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_6 + F_5 \cos 45^\circ + F_4 = 0, \quad F_6 = 43.6 \text{ kN} \quad (\text{压})$$

(3) 节点 D，受力如图 3-37d 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F_{10} - F_6 = 0, \quad F_{10} = 43.6 \text{ kN} \quad (\text{压})$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_2 - F_7 = 0, \quad F_7 = -20 \text{ kN} \quad (\text{压})$$

3-38 平面桁架的支座和载荷如图 3-38a 所示，求杆 1、2 和 3 的内力。

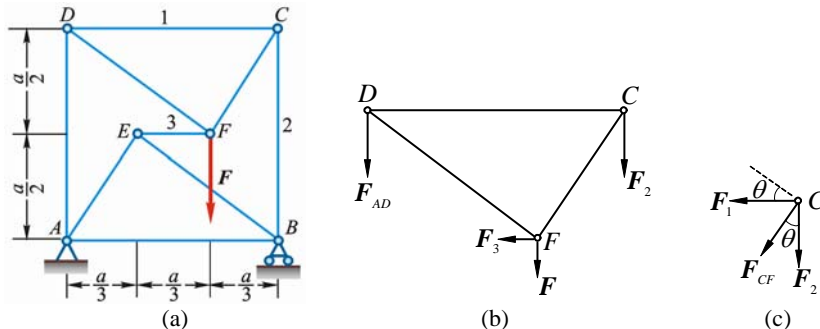


图 3-38

解 桁架沿杆 AD 和杆 3、2 截断，取上半部分，得受力图 3-38b:

$$\sum F_x = 0, \quad F_3 = 0$$

$$\sum M_D = 0, \quad F_2 = -2F/3 \quad (\text{压})$$

(2) 节点 C，受力如图 3-38c 所示。全部力系向垂直于 F_{CF} 方向投影得

$$F_1 \cos \theta - F_2 \sin \theta = 0, \quad F_1 = F_2 \tan \theta = -\frac{2}{3}F \cdot \frac{a/3}{a/2} = -\frac{4}{9}F \quad (\text{压})$$

第4章 空间力系

4-1 力系中, $F_1=100\text{ N}$, $F_2=300\text{ N}$, $F_3=200\text{ N}$, 各力作用线的位置如图 4-1 所示。试将力系向原点 O 简化。

解 由题意得

$$F_{Rx} = -300 \times \frac{2}{\sqrt{13}} - 200 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = -345\text{ N}$$

$$F_{Ry} = 300 \times \frac{3}{\sqrt{13}} = 250\text{ N}$$

$$F_{Rz} = 100 - 200 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 10.6\text{ N}$$

$$M_x = -300 \times \frac{3}{\sqrt{13}} \times 0.1 - 200 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times 0.3 = -51.8\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = -100 \times 0.20 + 200 \times \frac{2}{\sqrt{13}} \times 0.1 = -36.6\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 300 \times \frac{3}{\sqrt{13}} \times 0.2 + 200 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times 0.3 = 103.6\text{ N} \cdot \text{m}$$

主矢 $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = 426\text{ N}$, $F_R = (-345\mathbf{i} + 250\mathbf{j} + 10.6\mathbf{k})\text{ N}$

主矩 $M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 122\text{ N} \cdot \text{m}$, $M_O = (-51.8\mathbf{i} - 36.6\mathbf{j} + 104\mathbf{k})\text{ N} \cdot \text{m}$

4-2 1 平行力系由 5 个力组成, 力的大小和作用线的位置如图 4-2 所示。图中小正方格的边长为 10 mm 。求平行力系的合力。

解 由题意得合力 F_R 的大小为

$$F_R = \Sigma F_z = 1\text{ N} + 10\text{ N} + 20\text{ N} - 10\text{ N} - 15\text{ N} = 20\text{ N}$$

$$F_R = 20\mathbf{k}\text{ N}$$

合力作用线过点 $(x_C, y_C, 0)$:

$$x_C = \frac{1}{20} (15 \times 40 + 10 \times 30 + 20 \times 20 - 10 \times 10) = 60\text{ mm}$$

$$y_C = \frac{1}{20} (15 \times 10 + 10 \times 30 + 20 \times 50 - 10 \times 20 - 15 \times 40) = 32.5\text{ mm}$$

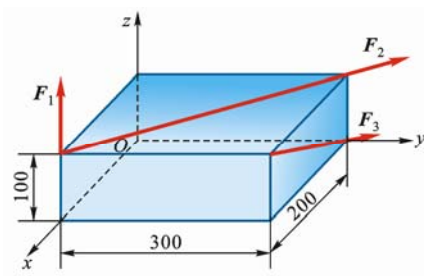


图 4-1

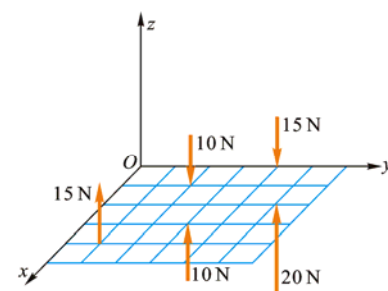


图 4-2

4-3 图示力系的 3 个力分别为 $F_1 = 350\text{ N}$, $F_2 = 400\text{ N}$ 和 $F_3 = 600\text{ N}$, 其作用线的位置如图 4-3 所示。试将此力系向原点 O 简化。

解 由题意得

$$F_{R'x} = 350 \times \frac{60}{\sqrt{18100}} - 600 \times \frac{1}{2} = -144\text{ N}$$

$$F_{R'y} = 350 \times \frac{80}{\sqrt{18100}} + 400 \times 0.707 + 600 \times 0.866 = 1010\text{ N}$$

$$F_{R'z} = 350 \times \frac{-90}{\sqrt{18100}} - 400 \times 0.707 = -517\text{ N}$$

主矢 $F_R' = \sqrt{F_{R'x}^2 + F_{R'y}^2 + F_{R'z}^2} = 1144\text{ N}$

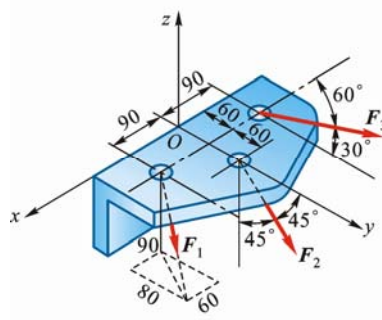


图 4-3

$$\mathbf{F}_R' = (-144\mathbf{i} + 1011\mathbf{j} - 517\mathbf{k}) \text{ N}$$

$$M_x = -350 \times \frac{90}{\sqrt{18100}} \times 60 - 400 \times 0.707 \times 120 = -48000 \text{ N} \cdot \text{mm} = -48 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 350 \times \frac{90}{\sqrt{18100}} \times 90 = 21070 \text{ N} \cdot \text{mm} = 21.07 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 350 \times \frac{80}{\sqrt{18100}} \times 90 - 350 \times \frac{60}{\sqrt{18100}} \times 60 - 600 \times 0.866 \times 90 + 600 \times \frac{1}{2} \times 60$$

$$= -19400 \text{ N} \cdot \text{mm} = -19.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{主矩 } M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 55900 \text{ N} \cdot \text{mm} = 55.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M}_O = (-48\mathbf{i} + 21.1\mathbf{j} - 19.4\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

4-4 求图 4-4 所示力 $F=1000 \text{ N}$ 对于 z 轴的力矩 M_z 。

解 把力 F 向 x, y 轴方向投影, 得

$$F_y = 1000 \times \frac{3}{\sqrt{35}} = 507 \text{ N}$$

$$F_x = 1000 \times \frac{1}{\sqrt{35}} = 169 \text{ N}$$

$$M_z = xF_y - yF_x = -150 \times 507 - 150 \times 169$$

$$= -101400 \text{ N} \cdot \text{mm} = -101.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

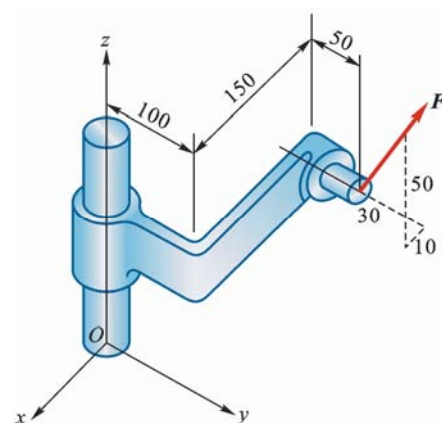
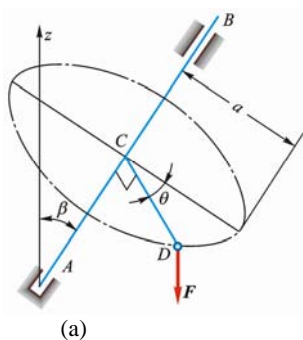
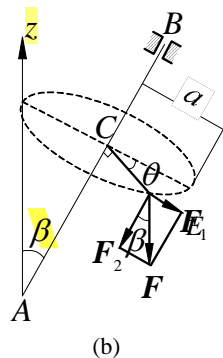


图 4-4

4-5 轴 AB 与铅直线成 α 角, 悬臂 CD 与轴垂直地固定在轴上, 其长为 a , 并与铅直面 zAB 成 θ 角, 如图 4-5a 所示。如在点 D 作用铅直向下的力 F , 求此力对轴 AB 的矩。



(a)



(b)

图 4-5

解 将力 F 分解为 F_1, F_2 , F_1 垂直于 AB 而与 CE 平行, F_2 平行于 AB , 如图 4-5b 所示, 这 2 个分力分别为:

$$F_1 = F \sin \alpha, \quad F_2 = F \cos \alpha$$

$$M_{AB}(F) = M_{AB}(F_1) + M_{AB}(F_2) = F_1 \cdot a \sin \theta + 0 = Fa \sin \alpha \sin \theta$$

4-6 水平圆盘的半径为 r , 外缘 C 处作用有已知力 F 。力 F 位于铅垂平面内, 且与 C 处圆盘切线夹角为 60° , 其他尺寸如图 4-6a 所示。求力 F 对 x, y, z 轴之矩。

解 (1) 方法 1, 如图 4-6b 所示, 由已知得

$$F_{xy} = F \cos 60^\circ, \quad F_z = F \cos 30^\circ$$

$$\mathbf{F} = F \cos 60^\circ \cos 30^\circ \mathbf{i} - F \cos 60^\circ \sin 30^\circ \mathbf{j} - F \sin 60^\circ \mathbf{k} = \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{i} - \frac{1}{4} F \mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} F \mathbf{k}$$

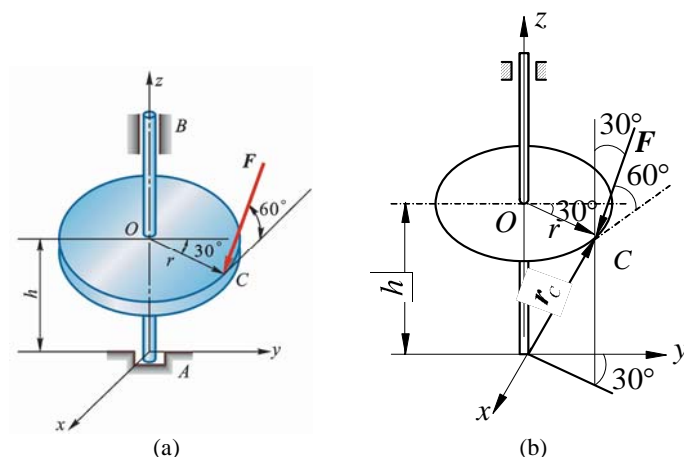


图 4-6

$$M_x(F) = \frac{1}{4}Fh - \frac{\sqrt{3}}{2}F \cdot r \cos 30^\circ = \frac{F}{4}(h - 3r)$$

$$M_y(F) = \frac{\sqrt{3}}{4}Fh + \frac{\sqrt{3}}{2}F \cdot r \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}F(h + r)$$

$$M_z(F) = -F \cos 60^\circ r = -\frac{1}{2}Fr$$

(2) 方法 2

$$\mathbf{F} = \frac{\sqrt{3}}{4}F\mathbf{i} - \frac{1}{4}F\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}F\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}r\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}r\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{r}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}r & h \\ \frac{\sqrt{3}}{4}F & -\frac{1}{4}F & -\frac{\sqrt{3}}{2}F \end{vmatrix} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

$$M_x = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r & h \\ -\frac{1}{4}F & -\frac{\sqrt{3}}{2}F \end{vmatrix} = \frac{F}{4}(h - 3r), \quad M_y = \begin{vmatrix} h & \frac{r}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}F & \frac{\sqrt{3}}{4}F \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4}F(h + r)$$

$$M_z = \begin{vmatrix} \frac{r}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ \frac{\sqrt{3}}{4}F & -\frac{1}{4}F \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}Fr$$

4-7 空间构架由 3 根无重直杆组成，在 D 端用球铰链连接，如图 4-7a 所示。 A 、 B 和 C 端则用球铰链固定在水平地板上。如果挂在 D 端的物重 $P=10\text{kN}$ ，求铰链 A 、 B 和 C 的约束力。

解 取节点 D 为研究对象，设各杆受拉，受力如图 4-7b 所示。平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad F_B \cos 45^\circ - F_A \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ - F_B \sin 45^\circ \cos 30^\circ - F_C \cos 15^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0, -F_A \sin 45^\circ \sin 30^\circ - F_B \sin 45^\circ \sin 30^\circ - F_C \sin 15^\circ - P = 0 \quad (3)$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

解得

$$F_A = F_B = -26.4 \text{ kN (压)} \quad F_C = 33.5 \text{ kN (拉)}$$

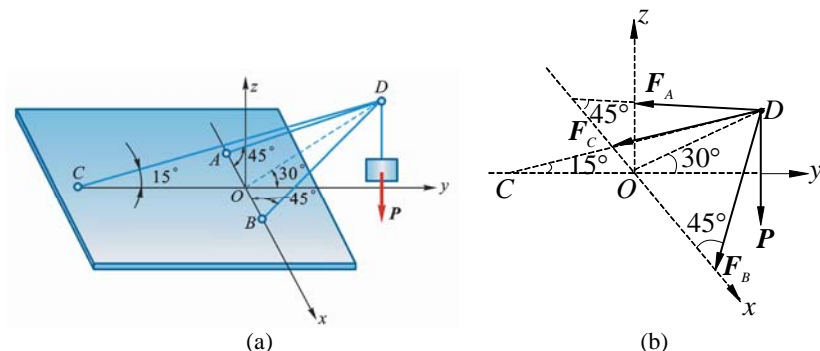


图 4-7

4-8 在图 4-8a 所示起重机中，已知：\$AB=BC=AD=AE\$；点 \$A, B, D\$ 和 \$E\$ 等均为球铰链连接，如三角形 \$ABC\$ 的投影为 \$AF\$ 线，\$AF\$ 与 \$y\$ 轴夹角为 \$\alpha\$。求铅直支柱和各斜杆的内力。

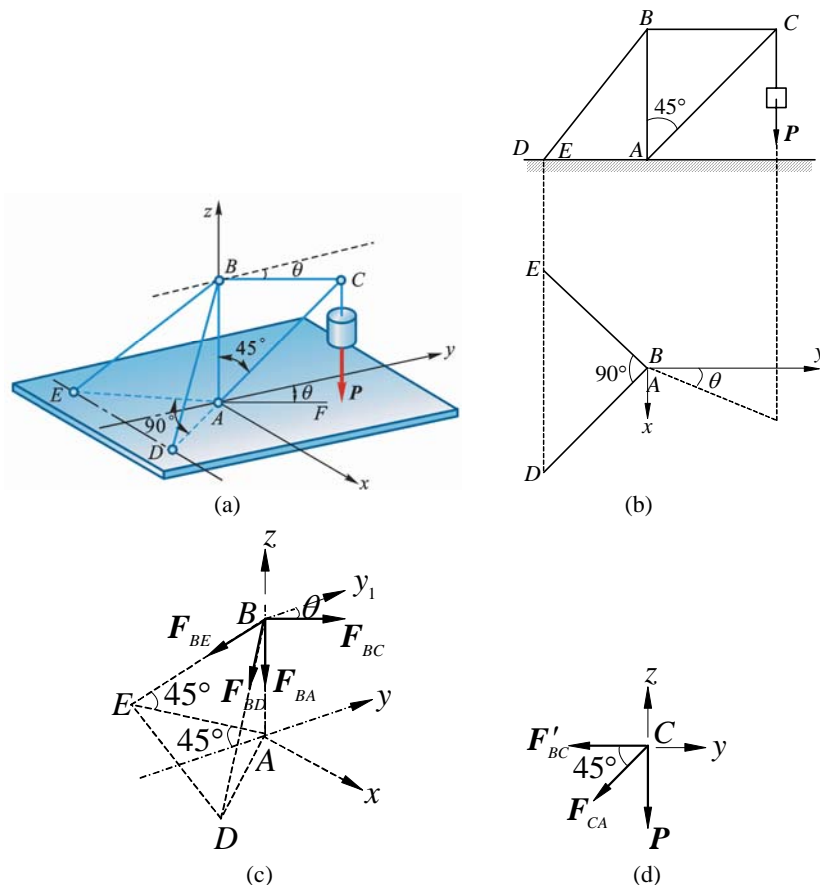


图 4-8

解 (1) 节点 \$C\$ 为研究对象，受力及坐标系如图 4-8d 所示，其中 \$x\$ 轴沿 \$BC\$，\$y\$ 轴铅直向上。

$$\sum F_x = 0, -F_{CB} - F_{CA} \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, -P - F_{CA} \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

解得

$$F_{CA} = -\sqrt{2}P \text{ (压)}, F_{CB} = P \text{ (拉)}$$

(2) 节点 \$B\$ 为研究对象，受力及坐标系如图 4-8b、图 4-8c 所示

$$\sum F_x = 0, (F_{BD} - F_{BE}) \cos 45^\circ \sin 45^\circ + F_{BC} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0, -(F_{BD} + F_{BE}) \cos^2 45^\circ + F_{BC} \cos \theta = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_z = 0, -F_{BA} - (F_{BD} + F_{BE}) \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

解得

$$F_{BE} = P(\cos \theta + \sin \theta), F_{BD} = F(\cos \theta - \sin \theta), F_{AB} = -\sqrt{2}P \cos \theta$$

4-9 图 4-9a 所示空间桁架由杆 1, 2, 3, 4, 5 和 6 构成。在节点 A 上作用 1 个力 F ，此力在矩形 $ABDC$ 平面内，且与铅直线成 45° 角。 $\triangle EAK = \triangle FBM$ 。等腰三角形 EAK , FBM 和 NDB 在顶点 A, B 和 D 处均为直角，又 $EC=CK=FD=DM$ 。若 $F=10\text{ kN}$ ，求各杆的内力。

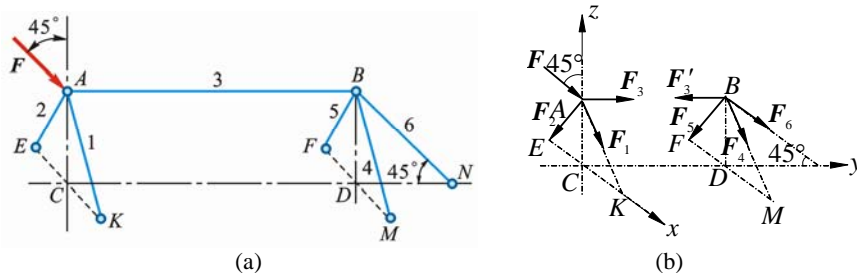


图 4-9

解 (1) 节点 A 为研究对象，受力及坐标如图 4-9b 所示

$$\sum F_x = 0, (F_1 - F_2) \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_3 + F \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0, -(F_1 + F_2) \sin 45^\circ - F \cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

解得 $F_1 = F_2 = \frac{-F}{2} = -5\text{ kN}, F_3 = -7.07\text{ kN}$

(2) 节点 B 为研究对象，受力如图 4-9b 所示

$$\sum F_x = 0, (F_4 - F_5) \cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0, F_6 \sin 45^\circ - F_3 = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_z = 0, -(F_4 + F_5 + F_6) \sin 45^\circ = 0 \quad (6)$$

解得 $F_4 = F_5 = 5\text{ kN}$ (拉), $F_6 = -10\text{ kN}$ (压)

4-10 如图 4-10a 所示，3 脚圆桌的半径为 $r = 500\text{ mm}$ ，重为 $P = 600\text{ N}$ 。圆桌的 3 脚 A, B 和 C 形成 1 等边三角形。若在中线 CD 上距圆心为 a 的点 M 处作用铅直力 $F = 1500\text{ N}$ ，求使圆桌不致翻倒的最大距离 a 。

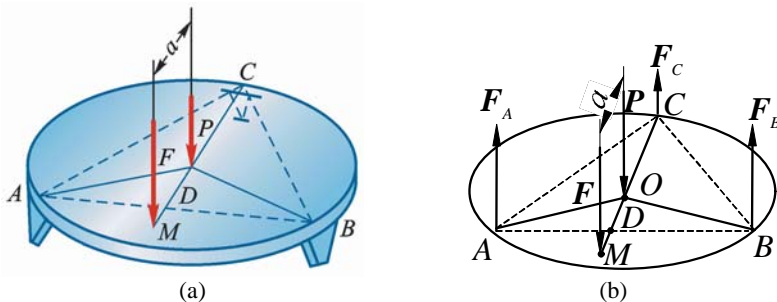


图 4-10

解 设圆桌中心为 D, AB 中点为 E, 则 $DE = r \sin 30^\circ = 250\text{ mm}$ 。取圆桌为研究对象，受力如图 4-10b 所示。若在点 M 作用力 F 使桌刚要翻倒，则此时 $F_{NC} = 0$ ，力系对轴 AB 的力矩平衡方程

$$\sum M_{AB} = 0, F \cdot ME - W \cdot DE = 0$$

$$ME = \frac{W}{F} \cdot DE = \frac{600\text{ N}}{1500\text{ N}} \times 250\text{ mm} = 100\text{ mm}$$

$$a = DE + EM = 350 \text{ mm}$$

4-11 图 4-11a 所示 3 圆盘 A、B 和 C 的半径分别为 150 mm，100 mm 和 50 mm。3 轴 OA、OB 和 OC 在同 1 平面内， $\angle AOB$ 为直角。在这 3 个圆盘上分别作用力偶，组成各力偶的力作用在轮缘上，它们的大小分别等于 10 N，20 N 和 F 。如这 3 个圆盘所构成的物系是自由的，不计物系重量，求能使此物系平衡的力 F 的大小和角 θ 。

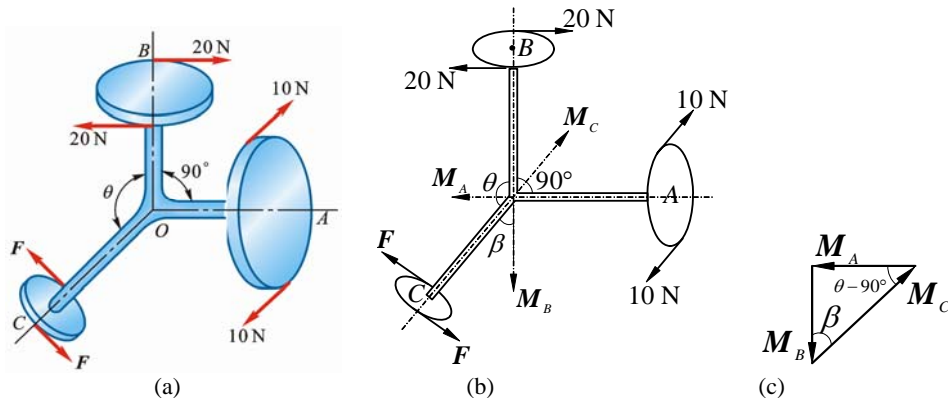


图 4-11

解 画出 3 个力偶的力偶矩矢如图 4-11b 所示，由力偶矩矢三角形图 4-11c 可见

$$M_C = \sqrt{M_A^2 + M_B^2} = \sqrt{3000^2 + 4000^2} = 5000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

由图 4-11a、图 4-11b 可得

$$M_C = F \times 100 \text{ mm}, \quad F = \frac{M_C}{100 \text{ mm}} = 50 \text{ N}$$

由图 4-11b、图 4-11c 可得

$$\tan \beta = \frac{M_A}{M_B} = \frac{3}{4}, \quad \beta = 36.87^\circ = 36^\circ 52'$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 143^\circ 08'$$

4-12 图 4-12a 所示手摇钻由支点 B，钻头 A 和 1 个弯曲的手柄组成。当支点 B 处加压力 F_x 、 F_y 和 F_z 以及手柄上加上 F 后，即可带动钻头绕轴 AB 转动而钻孔，已知 $F_z = 50 \text{ N}$ ， $F = 150 \text{ N}$ 。求：(1) 钻头受到的阻抗力偶矩 M ；(2) 材料给钻头的约束力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_{Az} 的值；(3) 压力 F_x 和 F_y 的值。

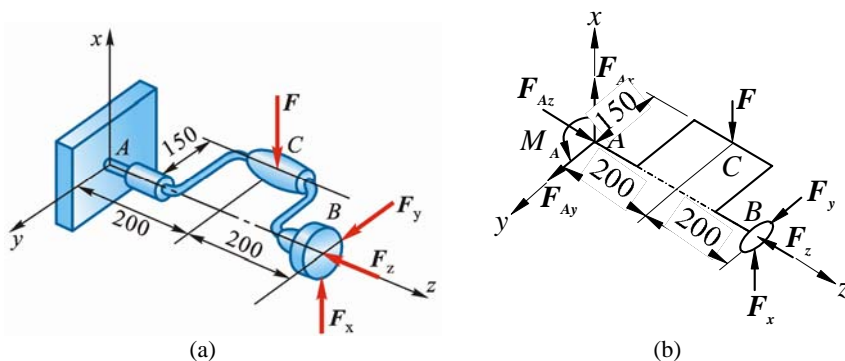


图 4-12

解 手摇钻为研究对象，受力如图 4-12b 所示

$$\sum M_z = 0, \quad M - F \times 150 \text{ mm} = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_y = 0, \quad F_x \times 400 \text{ mm} - F \times 200 \text{ mm} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_x = 0, \quad -F_y \times 400 \text{ mm} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_x + F_{Ax} - F = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_y + F_{Ay} = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_z = 0, -F_z + F_{Az} = 0 \quad (6)$$

解得 $M = 2.25 \text{ N} \cdot \text{m}$, $F_x = 75 \text{ N}$, $F_y = 0$, $F_{Ax} = 75 \text{ N}$, $F_{Ay} = 0 \text{ N}$, $F_{Az} = 50 \text{ N}$

4-13 如图 4-13a 所示, 已知镗刀杆的刀头上受切削力 $F_z = 500 \text{ N}$, 径向力 $F_x = 150 \text{ N}$, 轴向力 $F_y = 75 \text{ N}$, 刀尖位于 Oxy 平面内, 其坐标 $x=75 \text{ mm}$, $y=200 \text{ mm}$ 。工件重量不计, 求被切削工件左端 O 处的约束力。

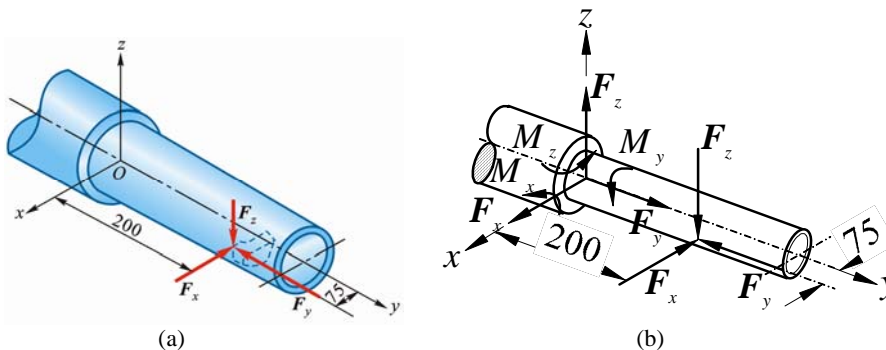


图 4-13

解 镗刀杆为研究对象, 受力如图 4-13b 所示。

$$\sum F_x = 0, -F_x + F_{Ox} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, -F_y + F_{Oy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0, -F_z + F_{Oz} = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0, -F_z \times 0.2 \text{ m} + M_x = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0, F_y \times 0.075 \text{ m} + M_y = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0, F_x \times 0.2 \text{ m} - F_y \times 0.075 \text{ m} + M_z = 0 \quad (6)$$

解得 $F_{Ox} = 150 \text{ N}$, $F_{Oy} = 75 \text{ N}$, $F_{Oz} = 500 \text{ N}$;

$M_x = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_y = -37.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ (与图示反向), $M_z = -24.4 \text{ N} \cdot \text{m}$ (与图示反向)

4-14 图 4-14a 所示电动机以转矩 M 通过链条传动将重物 P 等速提起, 链条与水平线成 30° 角 (直线 O_1x_1 平行于直线 Ax)。已知: $r=100 \text{ mm}$, $R=200 \text{ mm}$, $P=10 \text{ kN}$, 链条主动边 (下边) 的拉力为从动边拉力的 2 倍。轴及轮重不计。求支座 A 和 B 的约束力及链条的拉力。

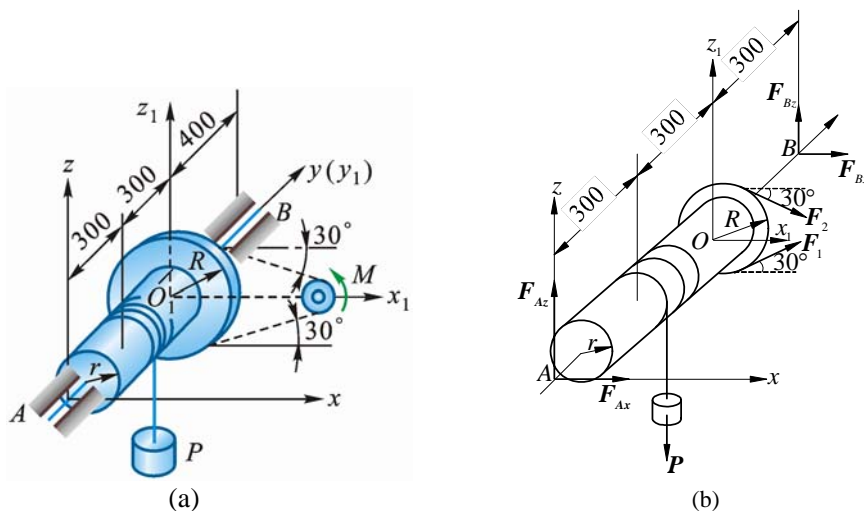


图 4-14

解 取整个轮轴 (包括重物 P) 为研究对象, 受力如图 4-14b 所示:

$$\sum M_y = 0, Pr - (F_1 - F_2)R = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_z = 0, -F_{Bx} \times 1 \text{ m} - (F_1 + F_2) \cos 30^\circ \times 0.6 \text{ m} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_x = 0, F_{Bz} \times 1 \text{ m} + (F_1 - F_2) \sin 30^\circ \times 0.6 \text{ m} - P \times 0.3 \text{ m} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{Bx} + (F_1 + F_2) \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_z = 0, F_{Az} + F_{Bz} + (F_1 - F_2) \sin 30^\circ - P = 0 \quad (5)$$

补充方程: $F_1 = 2F_2 \quad (6)$

解得

$$F_1 = 10 \text{ kN}, F_2 = 5 \text{ kN}; F_{Ax} = -5.2 \text{ kN}, F_{Az} = 6 \text{ kN};$$

$$F_{Bx} = -7.8 \text{ kN}, F_{Bz} = 1.5 \text{ kN} (\leftarrow)$$

4-15 某减速箱由 3 轴组成如图 4-15a 所示, 动力由轴 I 输入, 在轴 I 上作用转矩 $M_1=697 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。如齿轮节圆直径为 $D_1=160 \text{ mm}$, $D_2=632 \text{ mm}$, $D_3=204 \text{ mm}$, 齿轮压力角为 20° 。不计摩擦及轮、轴重量, 求等速传动时, 轴承 A, B, C, D 的约束力。

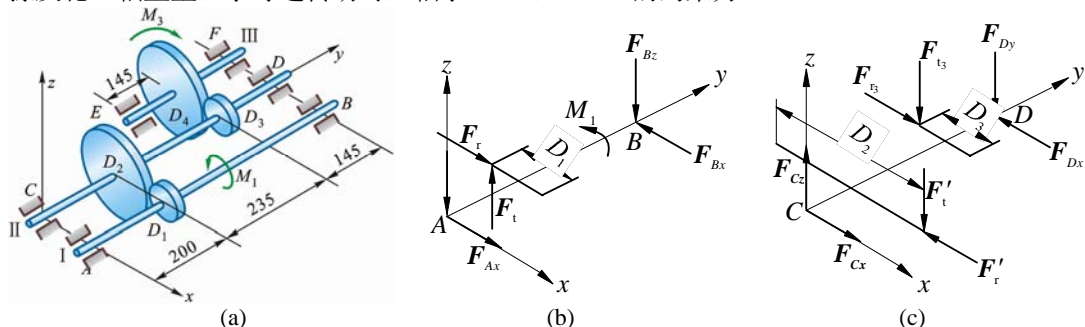


图 4-15

解 (1) 研究对象为轴 AB, 受力如图 4-15b 所示

$$\sum M_y = 0, F_t \cdot \frac{D_1}{2} = M_1, F_t \cdot \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \times 697 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.16 \text{ m}} = 8712.5 \text{ N}$$

$$F_t = F \cos \alpha, F_r = F \sin \alpha = F_t \tan \alpha = 3171 \text{ N}$$

$$\sum M_x = 0, F_t \times 200 \text{ mm} - F_{Bz} \times 580 \text{ mm} = 0, F_{Bz} = \frac{10}{29} F_t = 3004 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0, -F_{Az} - F_{Bz} + F_t = 0, F_{Az} = 5708 \text{ N}$$

$$\sum M_z = 0, -F_r \times 200 \text{ mm} + F_{Bx} \times 580 \text{ mm} = 0, F_{Bx} = 1093 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_r - F_{Bx} = 0, F_{Ax} = -2078 \text{ N}$$

(2) 研究对象为轴 CD, 受力如图 4-15c 所示

$$\sum M_y = 0, F'_t \cdot \frac{D_2}{2} - F'_{t3} \cdot \frac{D_3}{2} = 0$$

$$F'_{t3} = \frac{D_2}{D_3} F'_t = \frac{632 \text{ mm}}{204 \text{ mm}} \times 8712.5 \text{ N} = 26992 \text{ N}$$

$$F'_{r3} = F'_{t3} \tan 20^\circ = 9824 \text{ N}$$

$$\sum M_x = 0, -F'_t \times 200 \text{ mm} - F'_{t3} \times 435 \text{ mm} - F_{Dz} \times 580 \text{ mm} = 0$$

$$-8712.5 \text{ N} \times 200 \text{ mm} - 26992 \text{ N} \times 435 \text{ mm} + F_{Dz} \times 580 \text{ mm} = 0$$

$$F_{Dz} = -23248 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0, F_{Cz} - F'_t - F'_{t3} - F_{Dz} = 0, F_{Cz} = 12456 \text{ N}$$

$$\sum M_z = 0, F'_r \times 200 \text{ mm} - F'_{r3} \times 435 \text{ mm} + F_{Dx} \times 580 \text{ mm} = 0$$

$$3171 \text{ N} \times 200 \text{ mm} - 9824 \text{ N} \times 435 \text{ mm} + F_{Dx} \times 580 \text{ mm} = 0$$

$$F_{Dx} = 6275 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Cx} - F'_r + F_{r3} - F_{Dx} = 0, F_{Cx} = -378 \text{ N}$$

4-16 使水涡轮转动的力偶矩为 $M_z = 1200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。在锥齿轮 B 处受到的力分解为 3 个分力：圆周力 F_t ，轴向力 F_a 和径向力 F_r 。这些力的比例为 $F_t : F_a : F_r = 1 : 0.32 : 0.17$ 。已知水涡轮连同轴和锥齿轮的总重为 $P = 12 \text{ kN}$ ，其作用线沿轴 Cz ，锥齿轮的平均半径 $OB = 0.6 \text{ m}$ ，其余尺寸如图 4-16a 所示。求止推轴承 C 和轴承 A 的约束力。

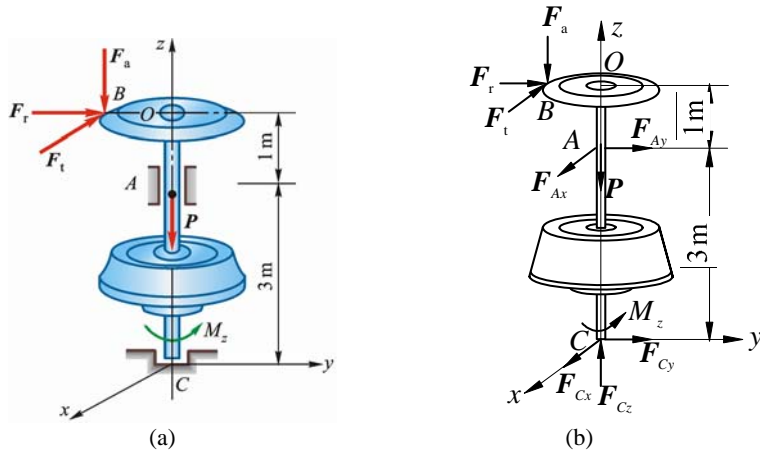


图 4-16

解 整个系统为研究对象，受力如图 4-16b 所示。设 B 处作用 F_t ， F_a ， F_r 的合力 F ，则

$$\frac{F_t}{F} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0.17^2 + 0.32^2}} = 0.9402$$

列平衡方程

$$\sum M_z = 0, M_z - 0.9402F \times 0.60 \text{ m}, F = 2127 \text{ N}$$

得

$$F_t = 0.9402F = 2000 \text{ N}, F_r = 0.17F_t = 340 \text{ N}, F_a = 0.32F_t = 640 \text{ N}$$

$$\sum M_x = 0, -F_r \times 4 \text{ m} - F_{Ay} \times 3 \text{ m} + F_a \times 0.6 \text{ m} = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{1}{3}(640 \times 0.6 - 340 \times 4) = -325 \text{ N} (\leftarrow)$$

$$\sum M_y = 0, -F_t \times 4 \text{ m} + F_{Ax} \times 3 \text{ m} = 0, F_{Ax} = \frac{4}{3} \times 2000 \text{ N} = 2.67 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, -F_t + F_{Ax} + F_{Cx} = 0, F_{Cx} = F_t - F_{Ax} = -667 \text{ N} (\text{与图设反向})$$

$$\sum F_y = 0, F_r + F_{Ay} + F_{Cy} = 0, F_{Cy} = -F_r - F_{Ay} = -14.7 \text{ N} (\leftarrow)$$

$$\sum F_z = 0, F_{Cy} - F_a - P = 0, F_{Cz} = F_a + P = 12640 \text{ N} = 12.6 \text{ kN}$$

4-17 如图 4-17a 所示，均质长方形薄板重 $P=200 \text{ N}$ ，用球铰链 A 和蝶铰链 B 固定在墙上，并用绳子 CE 维持在水平位置。求绳子的拉力和支座约束力。

解 取薄板为研究对象，受力如图 4-17b 所示。尽量采用力矩式求解。

$$\sum M_z = 0, -F_{Bx} \cdot AB = 0, F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_{AC} = 0, F_{Bz} \cdot AB \sin 30^\circ = 0, F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_y = 0, -F \sin 30^\circ \cdot BC + P \cdot \frac{BC}{2} = 0, F = P = 200 \text{ N}$$

$$\sum M_{BC} = 0, P \cdot \frac{AB}{2} - F_{Az} \cdot AB = 0, F_{Az} = P/2 = 100 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 0, F_{Ax} = 86.6 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ax} - F \cos 30^\circ \sin 30^\circ = 0, F_{Ay} = 150 \text{ N}$$

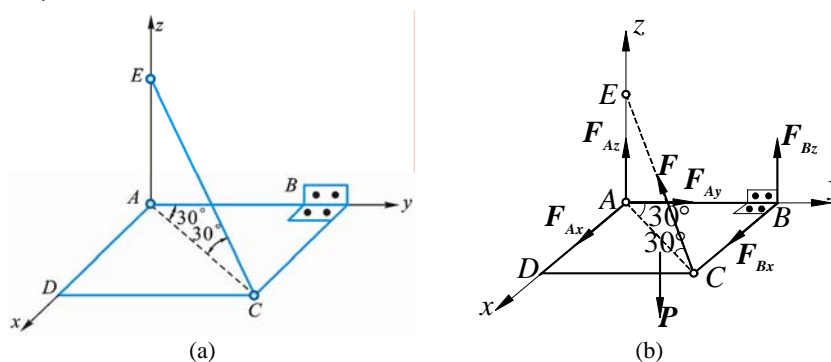


图 4-17

4-18 图 4-18a 所示 6 杆支撑 1 水平板，在板角处受铅直力 F 作用。设板和杆自重不计，求各杆的内力。

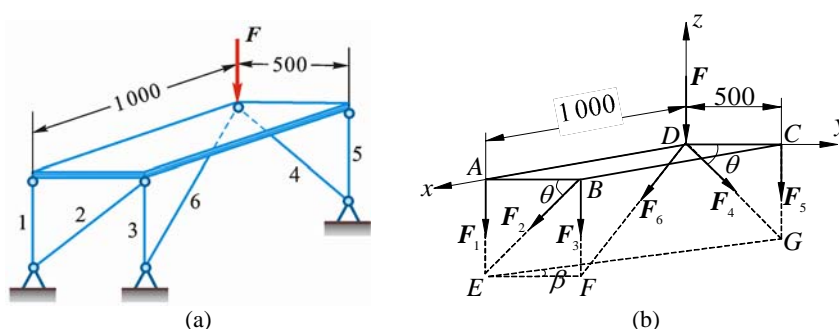


图 4-18

解 截开 6 根杆，取有板的部分为研究对象，受力如图 4-18b 所示。

$$\sum M_z = 0, -F_2 \cos \theta \cdot AD = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{BF} = 0, -F_4 \cos \theta \cdot BC = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0, F_6 \cdot \frac{AD}{FD} = 0 \quad (3)$$

解得

$$F_2 = 0, F_4 = 0, F_6 = 0$$

$$\sum M_{EG} = 0, (F_3 - F) \cdot EF \sin \beta = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{AD} = 0, (F_3 + F_5) \cdot AB = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_{BD} = 0, (F_1 - F_5) \cdot AB \sin \beta = 0 \quad (6)$$

解得

$$F_3 = F \text{ (拉)}, F_5 = -F \text{ (压)}, F_1 = -F \text{ (压)}$$

4-19 无重曲杆 $ABCD$ 有 2 个直角，且平面 ABC 与平面 BCD 垂直。杆的 D 端为球铰支座， A 端受轴承支持，如图 4-19a 所示。在曲杆的 AB ， BC 和 CD 上作用 3 个力偶，力偶所在平面分别垂直于 AB ， BC 和 CD 三线段。已知力偶矩 M_2 和 M_3 ，求使曲杆处于平衡的力偶矩 M_1 和支座约束力。

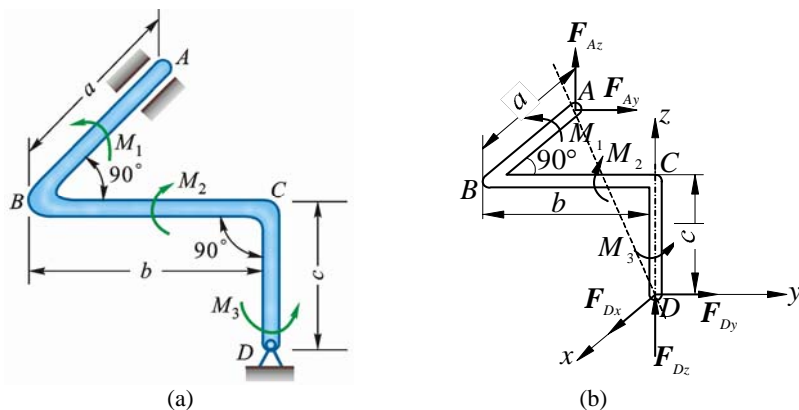


图 4-19

解 曲杆为研究对象，受力及坐标如图 4-19b 所示。平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Dx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{Dy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Az} + F_{Dz} = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0, \quad M_1 - F_{Ay} \cdot c - F_{Az} \cdot b = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0, \quad F_{Az} \cdot a - M_2 = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0, \quad M_3 - F_{Ay} \cdot a = 0 \quad (6)$$

由式 (5)、(6) 解得

$$F_{Az} = \frac{M_2}{a}, \quad F_{Ay} = \frac{M_3}{a}$$

代入式 (2)、(3)，得

$$F_{Dy} = -\frac{M_3}{a}, \quad F_{Dz} = -\frac{M_2}{a}$$

再代入式 (4)，得

$$M_1 = \frac{c}{a} M_3 + \frac{b}{a} M_2,$$

即

$$aM_1 - bM_2 - cM_3 = 0 \quad (7)$$

从图上看，在直角坐标系中，

$$\mathbf{M} = (M_1 \mathbf{i} - M_2 \mathbf{j} + M_3 \mathbf{k}), \quad \overrightarrow{DA} = (-a \mathbf{i} - b \mathbf{j} + c \mathbf{k}) \quad (8)$$

式 (7)、(8) 表明：

$$-\mathbf{M} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \quad \text{即} \quad \mathbf{M} \perp \overrightarrow{DA}$$

\mathbf{M} 只有满足此式才能使曲杆达到平衡。若 \mathbf{M} 有平行 \overrightarrow{DA} 的分量，则曲杆可绕 DA 轴线加速转动，当转过 1 小角度后，A 端约束力将要复杂化、不能再作向心轴承看待。

4-20 2 个均质杆 AB 和 BC 分别重 P_1 和 P_2 ，其端点 A 和 C 用球铰固定在水面上，另 1 端 B 由球铰链相连接，靠在光滑的铅直墙上，墙面与 AC 平行，如图 4-20a 所示。如 AB 与水平线交角为 45° ， $\angle BAC = 90^\circ$ 求 A 和 C 的支座约束力以及墙上点 B 所受的压力。

解 AB 和 BC 两杆为研究对象，受力及坐标如图 4-20b 所示。

由于未知力较多，尽可能用轴矩式平衡方程（需保证方程独立）求解，力求使取矩轴与较多的未知力相交和平行，从而使方程中所含未知量最少。

$$\sum M_{AC} = 0, \quad (P_1 + P_2) \cdot \frac{OA}{2} - F_N \cdot OB = 0, \quad F_N = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \quad (1)$$

$$\sum M_{Az'} = 0, \quad F_{Cy} \cdot AC = 0, \quad F_{Cy} = 0 \quad (2)$$

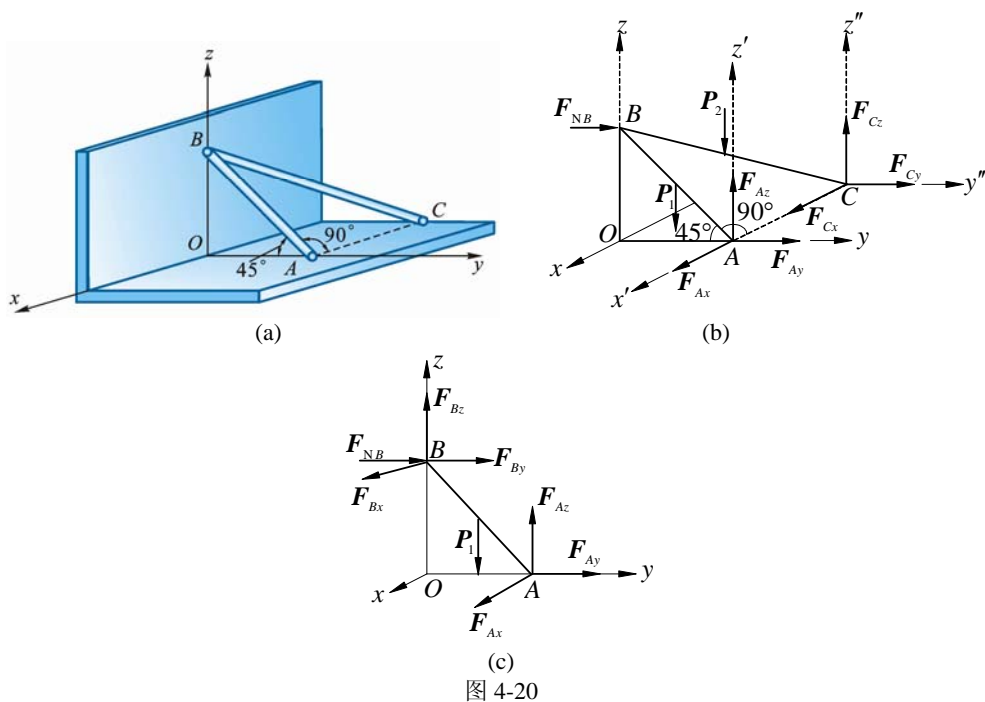


图 4-20

$$\sum M_{Az'} = 0, (F_N + F_{Ay}) \cdot AC = 0, F_{Ay} = -F_N = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) \quad (3)$$

$$\sum M_{Ay} = 0, F_{Cz} \cdot AC - P_2 \cdot \frac{AC}{2} = 0, F_{Cz} = \frac{1}{2}P_2 \quad (4)$$

$$\sum M_{Cy'} = 0, (-F_{Az} + P_1) \cdot AC + P_2 \cdot \frac{AC}{2} = 0, F_{Az} = P_1 + \frac{1}{2}P_2 \quad (5)$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{Cx} = 0 \quad (6)$$

(2) 杆 AB 为研究对象，受力及坐标如图 4-20c 所示

$$\sum M_{Oz} = 0, F_{Ax} \cdot OA = 0, F_{Ax} = 0 \quad (7)$$

代入式 (6)，得

$$F_{Cx} = 0 \quad (8)$$

4-21 杆系由球铰连接，位于正方体的边和对角线上，如图 4-21a 所示。在节点 D 沿对角线 LD 方向作用力 F_D 。在节点 C 沿 CH 边铅直向下作用 F 。如球铰 B, L 和 H 是固定的，杆重不计，求各杆的内力。

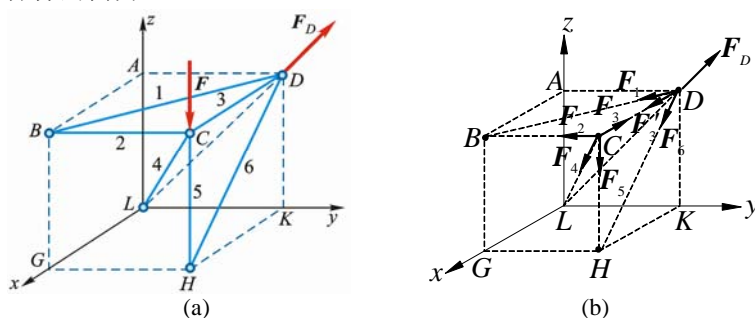


图 4-21

解 (1) 节点 D 为研究对象，受力如图 4-21b 所示

$$\sum F_y = 0, F_D \times \frac{1}{2} - F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, F_1 = F_D \text{ (拉)}$$

$$\sum F_z = 0, F_D \times \frac{1}{2} - F_6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, F_6 = F_D \text{ (拉)}$$

$$\sum F_x = 0, F_3 + (F_1 + F_6) \times (1/\sqrt{2}) = 0, F_3 = -\sqrt{2}F_D \text{ (压)}$$

(2) 节点 C 为研究对象, 受力如图 4-21b 所示

$$\sum F_x = 0, -F_3 - F_4 \times (1/\sqrt{3}) = 0, F_4 = -\sqrt{6}F_D \text{ (拉)}$$

$$\sum F_y = 0, -F_2 - F_4 \times (1/\sqrt{3}) = 0, F_2 = -\sqrt{2}F_D \text{ (压)}$$

$$\sum F_z = 0, -F - F_5 - F_4 \times (1/\sqrt{3}) = 0, F_5 = -F - \sqrt{2}F_D \text{ (压)}$$

4-22 图 4-22a 所示机床重 50 kN, 当水平放置时 ($\theta = 0^\circ$) 秤上读数为 15 kN, 当 $\theta = 20^\circ$ 时秤上读数为 10 kN, 试确定机床重心的位置。

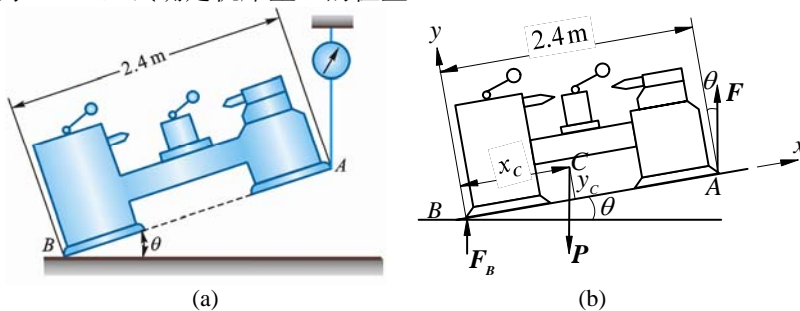


图 4-22

解 设机床相对水平地面倾斜 θ 角仍处于平衡, 其受力如图 4-22b 所示。又设机床重心 C 的坐标为 x_C 及 y_C , 则

$$\sum M_B = 0, 50 \text{ kN} \cdot \cos \theta \cdot x_C - 50 \text{ kN} \cdot \sin \theta \cdot y_C - F \cos \theta \times 2.4 \text{ m} = 0 \quad (1)$$

$\theta = 0^\circ$ 时,

$$F = 15 \text{ kN}$$

代入式 (1), 得

$$x_C = 0.72 \text{ m}$$

$\theta = 20^\circ$ 时, $F = 10 \text{ kN}$, 且 $x_C = 0.72 \text{ m}$

代入式 (1), 得

$$y_C = 0.659 \text{ m}$$

4-23 工字钢截面尺寸如图 4-23a 所示, 求此截面的几何中心。

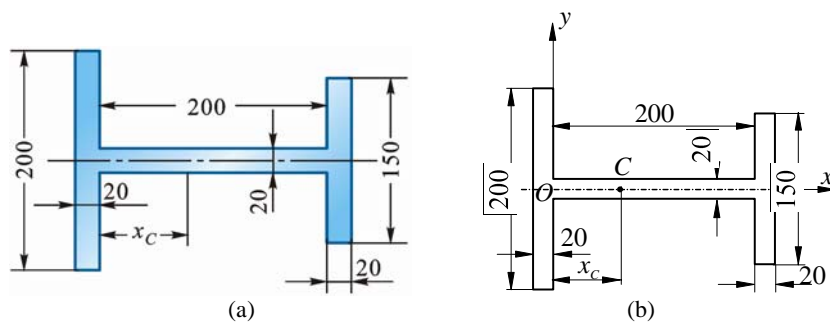


图 4-23

解 把图形的对称轴作轴 x , 如图 4-23b 所示, 图形的形心 C 在对称轴 x 上, 即

$$y_C = 0$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta A_i \cdot x_i}{\sum \Delta A_i} = \frac{200 \times 20 \times (-10) + 200 \times 20 \times 100 + 150 \times 20 \times 210}{200 \times 20 + 200 \times 20 + 150 \times 20} = 90 \text{ mm}$$

4-24 均质块尺寸如图 4-24 所示, 求其重心的位置。

$$\begin{aligned} \text{解 } x_C &= \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{\rho g (40 \times 40 \times 10 \times 60 + 20 \times 40 \times 30 \times 10 + 80 \times 40 \times 60 \times 20)}{\rho g (40 \times 40 \times 10 + 20 \times 40 \times 30 + 80 \times 40 \times 60)} \\ &= 21.72 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} = \frac{\rho g (40 \times 40 \times 10 \times 20 + 20 \times 40 \times 30 \times 60 + 80 \times 40 \times 60 \times 40)}{\rho g (40 \times 40 \times 10 + 20 \times 40 \times 30 + 80 \times 40 \times 60)}$$

$$= 40.69 \text{ mm}$$

$$z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} = \frac{\rho g (40 \times 40 \times 10 \times (-5) + 20 \times 40 \times 30 \times 15 + 80 \times 40 \times 60 \times (-30))}{\rho g (40 \times 40 \times 10 + 20 \times 40 \times 30 + 80 \times 40 \times 60)}$$

$$= -23.62 \text{ mm}$$

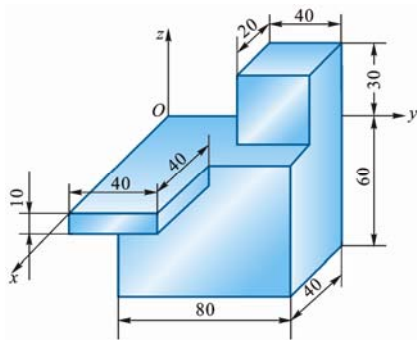


图 4-24

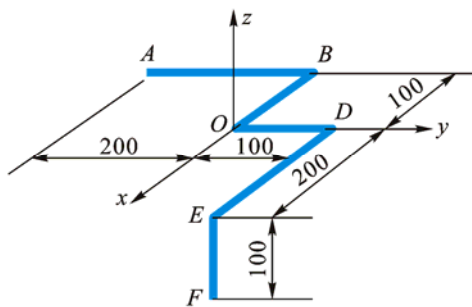


图 4-25

4-25 均质曲杆尺寸如图 4-25 所示，求此曲杆重心坐标。

解

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{200 \times (-100) + 100 \times (-50) + 100 \times 0 + 200 \times 100 + 100 \times 200}{200 + 100 + 100 + 200 + 100}$$

$$= 21.43 \text{ mm}$$

$$y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} = \frac{200 \times (-100) + 100 \times 0 + 100 \times 50 + 200 \times 100 + 100 \times 100}{700}$$

$$= 21.43 \text{ mm}$$

$$z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} = \frac{200 \times 0 + 100 \times 0 + 100 \times 0 + 200 \times 0 + 100 \times (-50)}{700}$$

$$= -7.143 \text{ mm}$$

4-26 图 4-26a 所示均质物体由半径为 r 的圆柱体和半径为 r 的半球体相结合组成。如均质体的重心位于半球体的大圆的中心点 C ，求圆柱体的高。

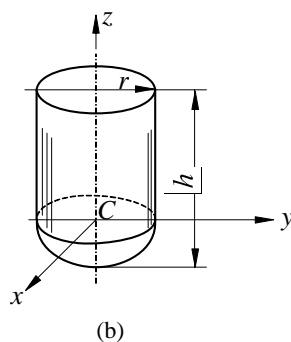
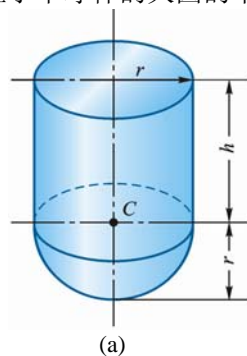


图 4-26

解 选坐标轴如图 4-26b 所示，由题意知

$$z_C = \frac{\pi r^2 h \cdot h/2 + 2\pi r^3/3 \cdot (-3r/3)}{\pi r^3 h + 2\pi r^3/3} = 0$$

解得

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0.707r$$

第5章 摩 擦

5-1 如图 5-1a 所示，置于 V 形槽中的棒料上作用 1 力偶，力偶矩 $M = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时，刚好能转动此棒料。已知棒料重力 $P = 400 \text{ N}$ ，直径 $D = 0.25 \text{ m}$ ，不计滚动摩擦阻。求棒料与 V 形槽间的静摩擦因数 f_s 。

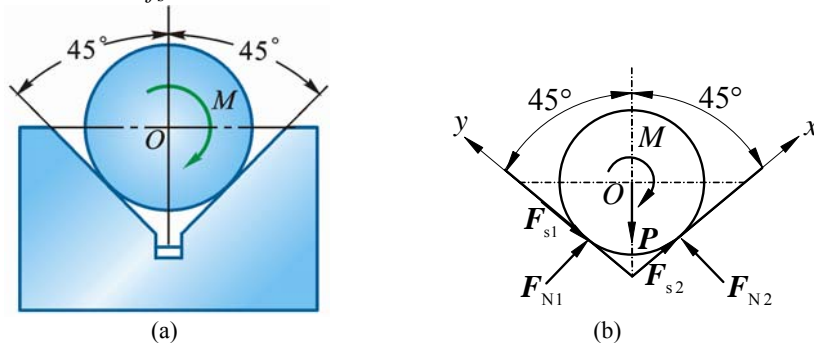


图 5-1

解 圆柱体为研究对象，受力如图 5-1b 所示， F_{s1} ， F_{s2} 为临界最大摩擦力。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} + F_{s2} - P \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N2} - F_{s1} - P \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O = 0, \quad F_{s1} \frac{D}{2} + F_{s2} \frac{D}{2} - M = 0 \quad (3)$$

临界状态摩擦定律：

$$F_{s1} = f_s F_{N1} \quad (4)$$

$$F_{s2} = f_s F_{N2} \quad (5)$$

以上 5 式联立，化得

$$f_s^2 - \frac{PDf_s}{M} \cos 45^\circ + 1 = 0$$

代入所给数据得

$$f_s^2 - 4.714f_s + 1 = 0$$

方程有 2 根：

$$f_{s1} = 4.442 \text{ (不合理)}, \quad f_{s2} = 0.223 \text{ (是解)}$$

故棒料与 V 形槽间的摩擦因数

$$f_s = 0.223$$

5-2 梯子 AB 靠在墙上，其重力为 $P = 200 \text{ N}$ ，如图 5-2a 所示。梯长为 l ，并与水平面交角 $\theta = 60^\circ$ 。已知接触面间的静摩擦因数均为 0.25。今有 1 重力为 650 N 的人沿梯向上爬，问人所能达到的最高点 C 到点 A 的距离 s 应为多少？

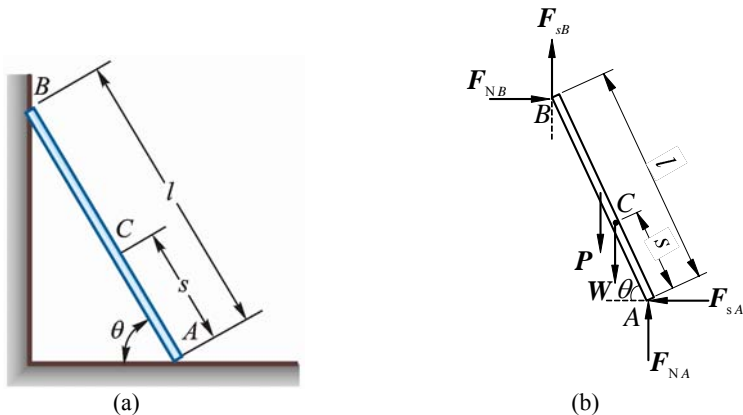


图 5-2

解 梯子为研究对象，受力如图 5-2b 所示，刚刚要滑动时， A, B 处都达最大静摩擦力。人重力 $W = 650 \text{ N}$ ，平衡方程：

$$\sum F_x = 0, F_{NB} - F_{sA} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_{NA} + F_{sB} - P - W = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0, P \frac{l}{2} \cos 60^\circ + Ws \cos 60^\circ - F_{NB} l \sin 60^\circ - F_{sB} l \cos 60^\circ = 0 \quad (3)$$

临界补充方程：

$$F_{sA} = f_s F_{NA} \quad (4)$$

$$F_{sB} = f_s F_{NB} \quad (5)$$

联立以上 5 式，解得

$$F_{NA} = \frac{P + W}{1 + f_s^2} = 800 \text{ N}, F_{sA} = 200 \text{ N}$$

$$F_{NB} = \frac{f_s}{1 + f_s^2} (P + W) = 200 \text{ N}, F_{sB} = 50 \text{ N}$$

$$s = \frac{l}{W} [(\sqrt{3} + f_s) F_{NB} - \frac{P}{2}] = 0.456l$$

5-3 2 根相同的匀质杆 AB 和 BC ，在端点 B 用光滑铰链连接， A, C 端放在不光滑的水平面上，如图 5-3a 所示。当 ABC 成等边三角形时，系统在铅直面内处于临界平衡状态。求杆端与水平面间的摩擦因数。

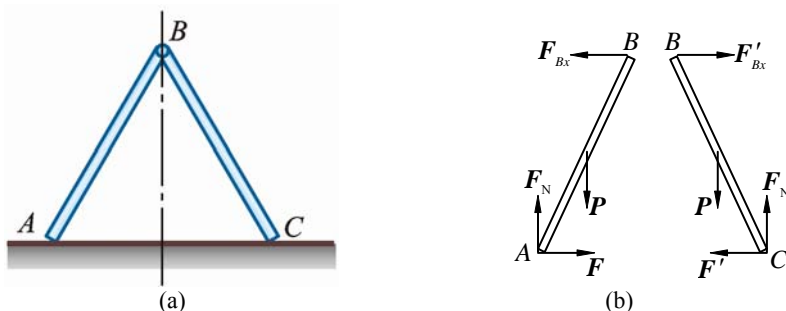


图 5-3

解 由于结构对称与主动力左右对称，约束力也对称，只需取 1 支杆 AB 为研究对象，受力如图 5-3b 所示，临界平衡时， A 端达最大静摩擦力，设 $AB = BC = l$ ，则

$$\sum F_y = 0, F_N - P = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0, F l \cos 30^\circ - F_N l \sin 30^\circ + P \frac{l}{2} \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

临界摩擦力为：

$$F = f_s F_N \quad (3)$$

解得

$$f_s = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.287$$

5-4 攀登电线杆的脚套钩如图 5-4a 所示。设电线杆直径 $d = 300 \text{ mm}$ ， A, B 间的铅直距离 $b = 100 \text{ mm}$ 。若套钩与电杆之间摩擦因数 $f_s = 0.5$ ，求工人操作时，为了完全，站在套钩上的最小距离 l 应为多大。

解 套钩为研究对象，受力如图 5-4b 所示，设工人站在保证安全的最小 l_{\min} 处，此时钩与电杆接触点 A, B 都达最大静摩擦力，方向向上。

$$\sum F_x = 0, F_{NA} - F_{NB} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_{sA} + F_{sB} - P = 0 \quad (2)$$

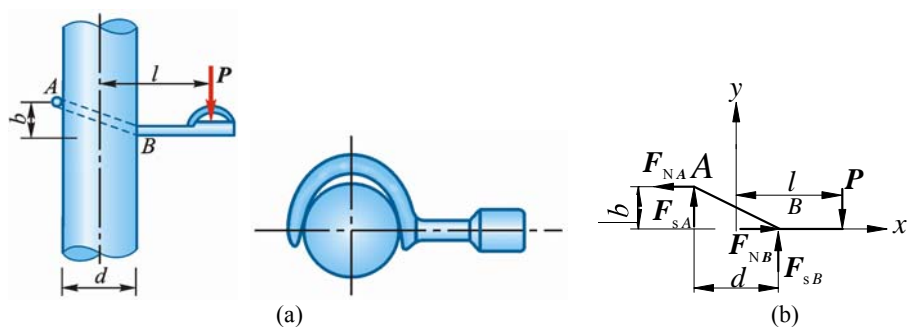


图 5-4

$$\sum M_A = 0, \quad -P(l_{\min} + \frac{d}{2}) + F_{NB}b + F_{sB}d = 0 \quad (3)$$

临界摩擦力:

$$F_{sA} = f_s F_{NA} \quad (4)$$

$$F_{sB} = f_s F_{NB} \quad (5)$$

式 (1)、(2)、(4)、(5) 联立, 解得

$$F_{sA} = F_{sB} = \frac{P}{2}, \quad F_{NA} = F_{NB} = \frac{P}{2f_s}$$

代入式 (3), 得

$$-P(l_{\min} + \frac{d}{2}) + P \cdot \frac{d}{2} + \frac{P}{2f_s} \cdot b = 0$$

$$l_{\min} = b = 100 \text{ mm}$$

5-5 不计自重的拉门与上下滑道之间的静摩擦因数均为 f_s , 门高为 h 。若在门上 $\frac{2}{3}h$ 处用水平力 F 拉门而不会卡住, 求门宽 b 的最小值。问门的自重对不被卡住的门宽最小值是否有影响?

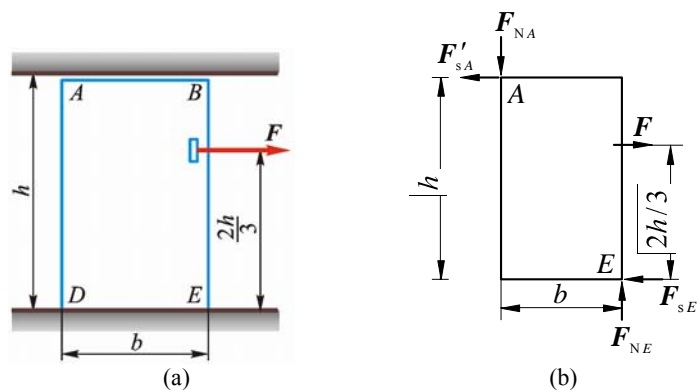


图 5-5

解 (1) 不计自重时受力如图 5-5b 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NE} = F_{NA}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F = F_{sE} + F_{sA}, \quad F_{sE} = f_s F_{NE}, \quad F_{sA} = f_s F_{NA}$$

$$F_{sE} = F_{sA}, \quad F = 2F_{sA}$$

$$\sum M_E = 0, \quad F \frac{2h}{3} - F_{sA}h - F_{NA} \cdot b_{\min} = 0$$

综上化得

$$\frac{4h}{3} - h - \frac{b_{\min}}{f_s} = 0$$

$$\frac{h}{3} = \frac{b_{\min}}{f_s}, \quad b_{\min} = \frac{f_s h}{3}$$

(2) 考虑门自重 W (位于门形心, 铅垂向下, 图中未画出) 时, 受力如图 5-5b 所示

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NE} = W + F_{NA}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F = F_{sE} + F_{sA}$$

临界摩擦力:

$$F_{sE} = f_s F_{NE}, \quad F_{sA} = f_s F_{NA}$$

$$\sum M_E = 0, -F \times \frac{2}{3}h + W \times \frac{1}{2}b + F_{NA} \cdot b + F_{sA}h = 0$$

解得

$$b = \frac{1}{3}f_s h + \frac{W}{F}f_s^2 h = \frac{1}{3}f_s h(1 + 3f_s h \cdot \frac{W}{F})$$

当门被卡住时, 无论力 F 多大, 门仍被卡住, 得

$$b_{\min} = \frac{f_s h}{3}$$

可见, 门重与此门宽最小值无关。

5-6 平面曲柄连杆滑块机构如图 5-6a 所示。 $OA = l$, 在曲柄 OA 上作用有 1 矩为 M 的力偶, OA 水平。连杆 AB 与铅垂线的夹角为 θ , 滑块与水平面之间的摩擦因数为 f_s , 不计重力, 且 $\tan \theta > f_s$ 。求机构在图示位置保持平衡时 F 力的值。

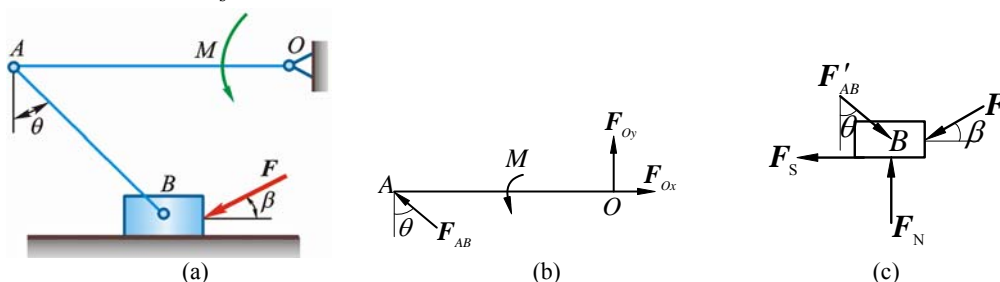


图 5-6

解 (1) 研究对象 AO , 受力如图 5-6b 所示

$$\sum M_O = 0 \quad F_{AB} \cos \theta \cdot l = M, \quad F_{AB} = \frac{M}{l \cdot \cos \theta} \quad (1)$$

(2) 研究对象为滑块 B , 受力如图 5-6c 所示, 这里假设 F 较小, B 有向右滑趋势:

$$\sum F_x = 0, \quad F'_{AB} \sin \theta - F \cos \beta - F_s = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - F'_{AB} \cos \theta - F \sin \beta = 0$$

$$F_N = F'_{AB} \cos \theta + F \sin \beta$$

补充方程:

$$F_s = f_s F_N$$

$$F_s = f_s (F'_{AB} \cos \theta + F \sin \beta) \quad (3)$$

式 (1) 代入式 (3), 得

$$F_s = f_s \left(\frac{M}{l} + F \sin \beta \right) \quad (4)$$

式 (1)、(4) 代入式 (2), 得

$$\frac{M}{l \cos \theta} \sin \theta - F \cos \beta - f_s \left(\frac{M}{l} + F \sin \beta \right) = 0$$

$$\frac{M}{l} (\tan \theta - f_s) = F (\cos \beta + f_s \sin \beta)$$

令 $f_s = \tan \varphi$ ，则

$$\frac{M}{l}(\tan \theta - \tan \varphi) = F(\cos \beta + \tan \varphi \sin \beta)$$

$$F = \frac{M(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi})}{l(\cos \beta + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \beta)} = \frac{M}{l \cos \theta} \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

F 较大时，滑块 B 滑动趋势与图 c 相反，即摩擦力 F_s 与图 c 所示相反，则此时式 (1)，(4) 不变，式 (2) 变为

$$F'_{AB} \sin \theta - F \cos \beta + F_s = 0$$

式 (1)，(4) 代入上式，得

$$\frac{M}{l \cos \theta} \sin \theta - F \cos \beta + f_s \frac{M}{l} + f_s F \sin \beta = 0$$

$$\frac{M}{l}(\tan \theta + f_s) = F(\cos \beta - f_s \sin \beta)$$

$$F = \frac{M(\tan \theta + f_s)}{l(\cos \beta - f_s \sin \beta)}$$

同样令 $f_s = \tan \varphi$ ，则

$$F = \frac{M \sin(\theta + \varphi)}{l \cos \theta \cos(\beta + \varphi)}$$

以上 2 个 F 是使系统保持平衡的 F 的最小与最大值，在两者之间的 F 都能保持平衡，即

$$\frac{M \sin(\theta - \varphi)}{l \cos \theta \cos(\beta - \varphi)} \leq F \leq \frac{M \sin(\theta + \varphi)}{l \cos \theta \cos(\beta + \varphi)}$$

5-7 轧压机由两轮构成，两轮的直径均为 $d = 500 \text{ mm}$ ，轮间的间隙为 $a = 5 \text{ mm}$ ，两轮反向转动，如图 5-7a 上箭头所示。已知烧红的铁板与铸铁轮间的摩擦因数 $f_s = 0.1$ ，问能轧压的铁板的厚度 b 是多少？

提示：欲使机器工作，则铁板必须被两转轮带动，亦即作用在铁板 A 、 B 处的法向反作用力和摩擦力的合力必须水平向右。

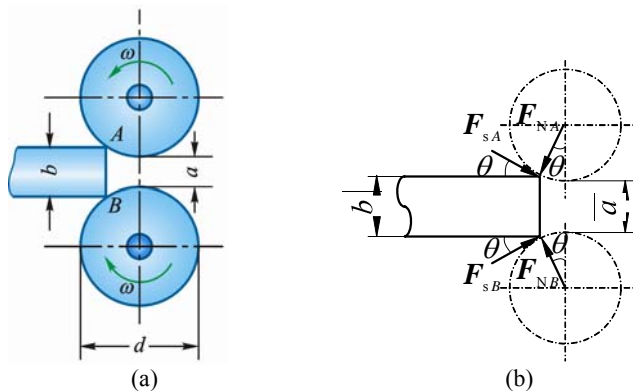


图 5-7

解 铁板主要受力为两轮的正压力 F_{NA} 、 F_{NB} 及摩擦力 F_{sA} 、 F_{sB} ，如图 5-7b 所示。由于两轮对称配置，可设

$$F_{NA} = F_{NB} = F_N, \quad F_{sA} = F_{sB} = F$$

合力水平向右，即

$$2F \cos \theta - 2F_N \sin \theta \geq 0, \quad F / F_N \geq \tan \theta$$

又由摩擦定律

$$F / F_N \leq f_s$$

比较上 2 式, 可见

$$\tan \theta = f_s$$

由几何关系

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d+a-b}{2}\right)^2}}{\frac{d+a-b}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 - (d+a-b)^2}}{d+a-b}$$

得

$$\sqrt{d^2 - (d+a-b)^2} \leq (d+a-b)f_s, \quad b \leq (a+d) - \frac{d}{\sqrt{1+f_s^2}}$$

将 $(1+f_s^2)^{-\frac{1}{2}}$ 展开, 略去 f_s^4 项及其后各项, 可得

$$b \leq a + \frac{d}{2}f_s^2 = 7.5 \text{ mm}$$

5-8 鼓轮利用双闸块制动器制动, 设在杠杆的末端作用有大小为 200 N 的力 F , 方向与杠杆相垂直, 如图 5-8a 所示, 自重均不计。已知闸块与鼓轮间的摩擦因数 $f_s = 0.5$, 又 $2R = O_1O_2 = KD = CD = O_1A = KL = O_2L = 0.5 \text{ m}$, $O_1B = 0.75 \text{ m}$, $AC = O_1D = 1 \text{ m}$, $ED = 0.25 \text{ m}$, 求作用于鼓轮上的制动力矩。

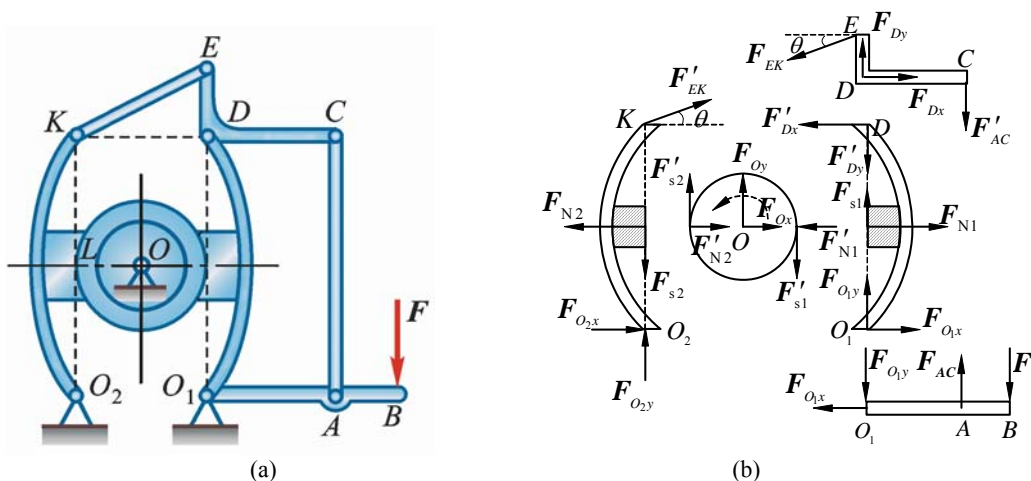


图 5-8

解 (1) 杆 O_1B 为研究对象, 受力如图 5-8b 所示的下部。

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F_{AC} \cdot O_1A - F \cdot O_1B = 0, \quad F_{AC} = \frac{O_1B}{O_1A} F = 300 \text{ N}$$

由几何关系

$$\cos \theta = \frac{KD}{KE} = \frac{0.50}{\sqrt{0.50^2 + 0.25^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2) 杆 CDE 为研究对象, 受力如图 5-8b 所示的上部。

$$\sum M_D = 0, \quad F_{KE} \cos \theta \cdot DE - F'_{AC} \cdot DC = 0, \quad F_{KE} = \sqrt{5} F_{AC}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Dx} - F_{KE} \cos \theta = 0, \quad F_{Dx} = F_{KE} \cos \theta = 2 F_{AC} = 600 \text{ N}$$

(3) 杆 O_1D 为研究对象, 受力如图 5-8b 所示的右部。

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F'_{Dx} \cdot O_1D - F_{N1} \cdot \frac{O_1D}{2} = 0, \quad F_{N1} = 2 F'_{Dx} = 1200 \text{ N}$$

(4) 杆 O_2K 为研究对象, 受力如图 5-8b 所示的左部。

$$\begin{aligned}\sum M_{O_2} = 0, \quad F_{N_2} \cdot \frac{O_2K}{2} - F'_{KE} \cos \theta \cdot O_2K &= 0 \\ F_{N_2} &= 2F'_{KE} \cos \theta = 4F_{AC} = 1200 \text{ N}\end{aligned}$$

由摩擦定律

$$F_{s1} = 0.5F_{N1} = 600 \text{ N}, \quad F_{s2} = 0.5F_{N2} = 600 \text{ N}$$

(5) 鼓轮为研究对象, 受力如图 5-8b 所示的中部, 由平衡条件得制动力矩为

$$M = (F'_{s1} + F'_{s2})R = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5-9 砖夹的宽度为 0.25 m, 曲杆 AGB 与 $GCED$ 在点 G 铰接, 尺寸如图 5-9a 所示。设砖重 $P=120 \text{ N}$, 提起砖的力 F 作用在砖夹的中心线上, 砖夹与砖间的摩擦因数 $f_s = 0.5$, 求距离 b 为多大才能把砖夹起。

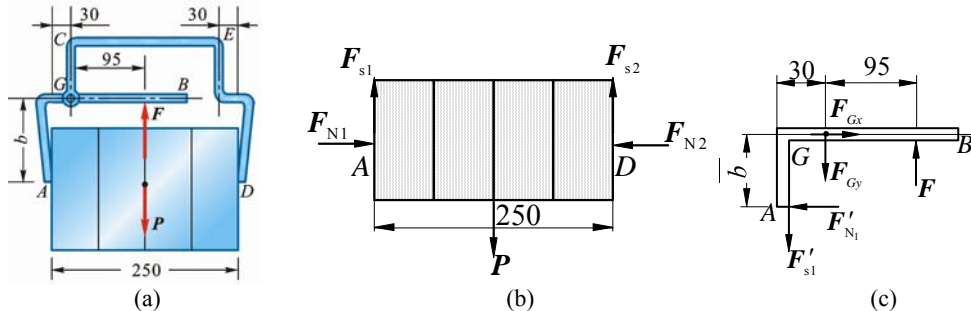


图 5-9

解 (1) 整体为研究对象, 受力如图 5-9a 所示, 由图 5-9a 得出:

$$F = P = 120 \text{ N}$$

(2) 砖块为研究对象, 受力如图 5-9b 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} - F_{N2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{s1} - F_{s2} - P = 0 \quad (2)$$

补充方程:

$$F_{s1} \leq f_s F_{N1}, \quad F_{s2} \leq f_s F_{N2} \quad (3)$$

解得

$$F_{s1} = F_{s2} = \frac{P}{2} = 60 \text{ N}, \quad F_{N1} = F_{N2} \geq \frac{F_{s1}}{f_s} = 120 \text{ N}$$

(3) 曲杆 AGB 为研究对象, 受力如图 5-9c 所示

$$\sum M_G = 0, \quad F \times 95 \text{ mm} + F_{s1} \times 30 \text{ mm} - F'_{N1} \cdot b = 0$$

以 P 、 F_{s1} 、 F_{N1} 值代入, 解得

$$b \leq 110 \text{ mm}$$

5-10 图 5-10a 所示起重用的夹具由 ABC 和 DEF 两个相同的弯杆组成, 并由杆 BE 连接, B 和 E 都是铰链, 尺寸如图, 不计夹具自重。问要能提起重物 P , 夹具与重物接触面处的摩擦因数 f_s 应为多大? (忽略 BE 间距尺寸)

解 (1) 整体为研究对象, 受力如图 5-10a 所示, 得

$$F = P$$

(2) 吊环 O 为研究对象, 受力如图 5-10d 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F_D \sin 60^\circ - F_A \sin 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F - F_D \cos 60^\circ - F_A \cos 60^\circ = 0 \quad (2)$$

解得

$$F_A = F_D = F = P$$

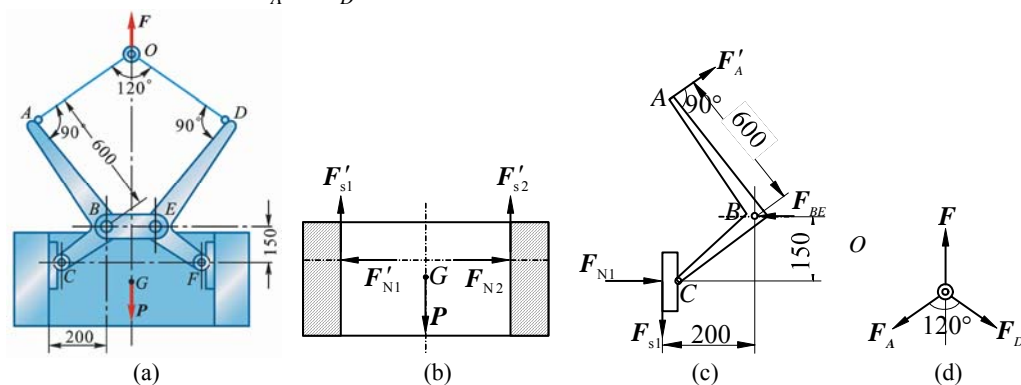


图 5-10

(3) 重物为研究对象，受力如图 5-10b 所示

$$\sum F_x = 0, \quad F'_{N1} - F'_{N2} = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F'_{s2} + F'_{s1} - P = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_G = 0, \quad F'_{s1} \times 0.20 \text{ m} - F'_{s2} \times 0.20 \text{ m} = 0 \quad (5)$$

摩擦力

$$F'_{s1} \leq f_s F'_{N1} \quad (6)$$

$$F'_{s2} \leq f_s F'_{N2} \quad (7)$$

解得

$$F'_{s1} = F'_{s2} \geq \frac{P}{2}$$

$$F'_{N1} = F'_{N2} \geq \frac{P}{2f_s}$$

(4) 弯杆 ABC 为研究对象，受力如图 5-10c 所示

$$\sum M_B = 0, \quad -F'_A \times 600 \text{ mm} + F_{N1} \times 150 \text{ mm} + F_{s1} \times 200 \text{ mm} = 0$$

把有关量代入上式，得

$$f_s \geq 0.15$$

5-11 图 5-11a 所示 2 无重杆在 B 处用套筒式无重滑块连接，在杆 AD 上作用 1 力偶，其力偶矩 $M_A = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，滑块和杆 AD 间的摩擦因数 $f_s = 0.3$ ，求保持系统平衡时力偶矩 M_C 的范围。

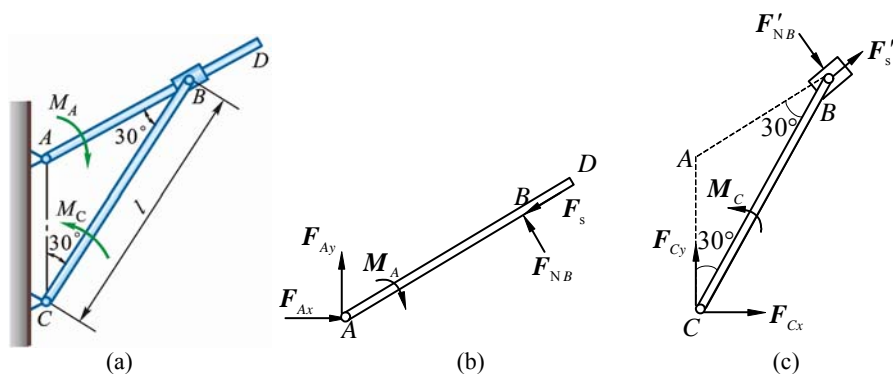


图 5-11

解 (1) 研究对象为杆 AD，受力如图 5-11b 所示

$$\sum M_A = 0, F_{NB} \cdot AB - M_A = 0, AB = \frac{l}{2} / \cos 30^\circ$$

$$F_{NB} = \frac{M_A}{\frac{l}{2} / \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} M_A}{l} \quad (1)$$

$$F_s = f_s F_{NB} = \frac{\sqrt{3} f_s M_A}{l} \quad (2)$$

(2) 研究对象为杆 CB, 受力如图 5-11c 所示

$$\sum M_C = 0, -M_C + F_s' l \sin 30^\circ + F_{NB}' l \cos 30^\circ = 0 \quad (3)$$

式 (1)、(2) 代入式 (3), 得

$$-M_C + \frac{\sqrt{3} f_s M_A}{l} l \sin 30^\circ + \frac{\sqrt{3} M_A}{l} l \cos 30^\circ = 0$$

$$M_C = \frac{\sqrt{3}}{2} f_s M_A + \frac{3}{2} M_A = \frac{M_A}{2} (\sqrt{3} f_s + 3) = \left[\frac{40}{2} (\sqrt{3} \times 0.3 + 3) \right] \text{N} \cdot \text{m} = 70.4 \text{N} \cdot \text{m}$$

当 M_C 较小时, 摩擦力 F_s 与图示反向, 此时式 (1)、(2) 不变, 式 (3) 变为

$$-M_C - \frac{\sqrt{3} f_s M_A}{l} l \sin 30^\circ + \frac{\sqrt{3} M_A}{l} l \cos 30^\circ = 0$$

$$M_C = \frac{M_A}{2} (3 - \sqrt{3} f_s) = \left[\frac{40}{2} (3 - \sqrt{3} \times 0.3) \right] \text{N} \cdot \text{m} = 49.6 \text{N} \cdot \text{m}$$

$$49.6 \text{N} \cdot \text{m} \leq M_C \leq 70.4 \text{N} \cdot \text{m}$$

5-12 均质箱体 A 的宽度 $b = 1 \text{m}$, 高 $h = 2 \text{m}$, 重力 $P = 200 \text{kN}$, 放在倾角 $\theta = 20^\circ$ 的斜面上。箱体与斜面之间的摩擦因数 $f_s = 0.2$ 。今在箱体的 C 点系 1 无重软绳, 方向如图所示, 绳的另一端绕过滑轮 D 挂 1 重物 E。已知 $BC = a = 1.8 \text{m}$ 。求使箱体处于平衡状态的重物 E 的重量。

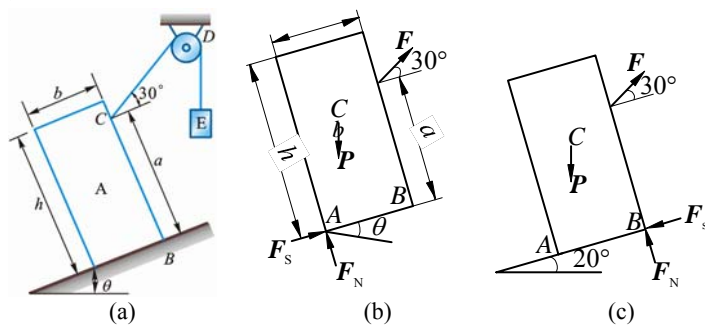


图 5-12

解 (1) 物 E 重较小时, 临界受力如图 5-12b 所示

① 临界下滑

$$\sum F_x = 0, F \cos 30^\circ + F_s - P \sin 20^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_N = P \cos 20^\circ - F \sin 30^\circ \quad (2)$$

$$F_s = f_s F_N \quad (3)$$

式 (2) 代入式 (3), 式 (3) 代入式 (1), 消去 F_N 、 F_s , 得

$$F = \frac{P(\sin 20^\circ - f_s \cos 20^\circ)}{\cos 30^\circ - f_s \sin 30^\circ} = 40.2 \text{kN} \quad (4)$$

② 临界逆时针翻倒判别

$$M_A(\mathbf{P}) = P \sin 20^\circ \cdot \frac{h}{2} - P \cos 20^\circ \cdot \frac{b}{2} < 0$$

又因为

$$F \geq 0, M_A(\mathbf{F}) < 0$$

所以图 5-12b 所示状态不会翻倒。

(2) 物 E 较重时, F 较大, 上滑与顺时针倾倒的临界受力如图 5-12c 所示。

① 临界上滑

$$\sum F_x = 0, F \cos 30^\circ - F_s - P \sin 20^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0, F \sin 30^\circ - P \cos 20^\circ + F_N = 0 \quad (6)$$

$$F_s = f_s F_N \quad (7)$$

式 (6) 代入式 (7), 式 (7) 代入式 (5), 得

$$F \cos 30^\circ - f_s (P \cos 20^\circ - F \sin 30^\circ) - P \sin 20^\circ = 0$$

解得

$$F = \frac{P(\sin 20^\circ + f_s \cos 20^\circ)}{\cos 30^\circ + f_s \sin 30^\circ} = \frac{200 \text{ kN} \cdot (\sin 20^\circ + 0.2 \cos 20^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.2 \times \frac{1}{2}} = 109.7 \text{ kN} \quad (8)$$

② 临界顺时针翻倒

$$\sum M_B = 0, -F \cos 30^\circ \cdot a + P \cos 20^\circ \cdot \frac{b}{2} + P \sin 20^\circ \cdot \frac{h}{2} = 0$$

$$F = \frac{\frac{P}{2}(b \cos 20^\circ + h \sin 20^\circ)}{a \cos 30^\circ} = \frac{100 \text{ kN} \cdot (\cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ)}{1.8 \cos 30^\circ} = 104 \text{ kN} \quad (9)$$

由式 (4)、(8)、(9) 得

$$40.2 \text{ kN} \leq F \leq 104 \text{ kN}$$

这里的 F 为保持平衡时物 E 的重力范围。

5-13 机床上为了迅速装卸工件, 常采用如图 5-13a 所示的偏心轮夹具。已知偏心轮直径为 D , 偏心轮与台面间的摩擦因数为 f_s 。现欲使偏心轮手柄上的外力去掉后, 偏心轮不会自动脱落, 求偏心距 e 应为多少? 各铰链中的摩擦忽略不计。

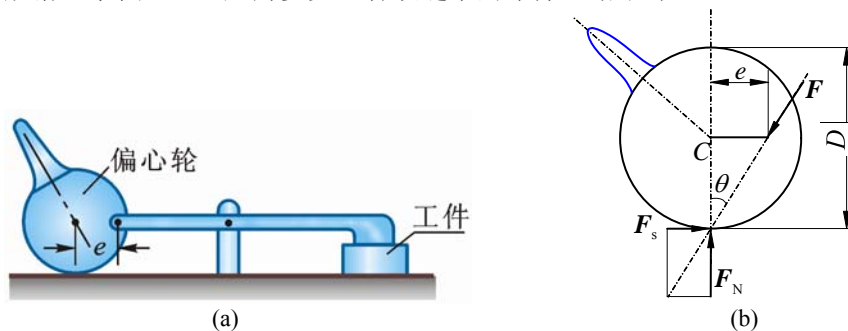


图 5-13

解 忽略偏心轮重力, 则偏心轮保持平衡相当于二力杆, 由自锁条件如图 5-13b 受力得

$$\frac{e}{\frac{D}{2}} \leq \tan \theta = f_s, e \leq \frac{f_s D}{2}$$

***5-14** 均质圆柱重力 P , 半径为 r , 搁在不计自重的水平杆和固定斜面之间。杆端 A 为光滑铰链, D 端受 1 铅垂向上的力 F , 圆柱上作用 1 力偶, 如图 5-14a 所示, 已知 $F = P$, 圆柱与杆和斜面间的静滑动摩擦因数皆为 $f_s = 0.3$, 不计滚动摩擦, 当 $\theta = 45^\circ$ 时, $AB = BD$ 。求此时能保持系统静止的力偶矩 M 的最小值。

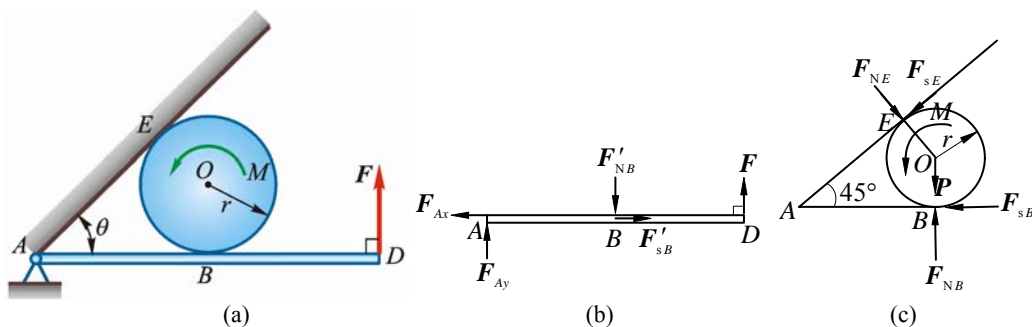


图 5-14

解 (1) 研究对象为杆 ABD , 受力如图 5-14b 所示

$$\sum M_A = 0, \quad AB = BD, \quad F'_{NB} = 2F = 2P$$

(2) 研究对象为轮 O , 受力如图 5-14c 所示

① 设 E 处摩擦力先达临界值, 则

$$F_{sE} = f_s F_{NE}$$

$$\sum F_y = 0, \quad 2P - P - F_{NE} \cos 45^\circ - f_s F_{NE} \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{NE} = \frac{\sqrt{2}P}{1 + f_s} = \frac{10\sqrt{2}}{13}P, \quad F_{sE} = f_s F_{NE} = \frac{3\sqrt{2}}{13}P \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NE} \cos 45^\circ - f_s F_{NE} \cos 45^\circ - F_{sB} = 0$$

$$F_{sB} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{NE} (1 - f_s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{10\sqrt{2}}{13} P \times 0.7 = \frac{7}{13}P \quad (2)$$

$$F_{sB \max} = f_s F_{NB} = 0.3 \times 2P = 0.6P > F_{sB}$$

点 B 处摩擦力未达临界值。

$$\sum M_O = 0, \quad (F_{sB} - F_{sE})r = M$$

$$M = \frac{7 - 3\sqrt{2}}{13} Pr = 0.212Pr \quad (3)$$

② 设 B 处摩擦力先达临界值, 则

$$F_{sB} = f_s F_{NB} = 0.6P$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NE} \cos 45^\circ + F_{sE} \cos 45^\circ + P = 2P$$

$$F_{NE} + F_{sE} = \sqrt{2}P \quad (4)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NE} \cos 45^\circ - F_{sE} \cos 45^\circ - F_{sB} = 0$$

$$F_{NE} - F_{sE} = \sqrt{2}F_{sB} = 0.6\sqrt{2}P \quad (5)$$

式 (4) - 式 (5), 得

$$F_{sE} = 0.2\sqrt{2}P = 0.2828P$$

式 (4) + 式 (5), 得

$$F_{NE} = 0.8\sqrt{2}P$$

$$F_{sE \max} = f_s F_{NE} = 0.3 \times 0.8\sqrt{2}P = 0.3394P > F_{sE}$$

$$\sum M_O = 0 \quad (F_{sB} - F_{sE})r = M$$

$$M = (0.6 - 0.2828)Pr = 0.3172Pr \quad (6)$$

比较式 (3)、(6) 得

$$M_{\min} = 0.212Pr$$

*5-15 重为 $P_1 = 450 \text{ N}$ 的均质梁 AB 。梁的 A 端为固定铰支座, 另 B 端搁置在重

$W_2 = 343 \text{ N}$ 的线圈架的芯轴上，轮心 C 为线圈架的重心。线圈架与 AB 梁和地面间的静滑动摩擦因数分别为 $f_{s1} = 0.4$ ， $f_{s2} = 0.2$ ，不计滚动摩阻，线圈架的半径 $R = 0.3 \text{ m}$ ，芯轴的半径 $r = 0.1 \text{ m}$ 。在线圈架的芯轴上绕 1 不计重量的软绳，求使线圈架由静止而开始运动的水平拉力 F 的最小值。

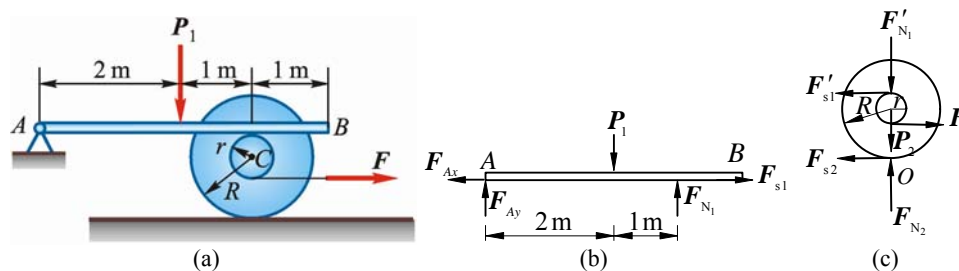


图 5-15

解 (1) 研究对象为杆 AB ，受力如图 5-15b 所示

$$\sum M_A = 0, \quad F_{N1} = \frac{2}{3} P_1 = 300 \text{ N}$$

(2) 研究对象为线圈架轮，受力如图 5-15c 所示

$$F'_{s1} = f_{s1} F'_{N1} = (0.4 \times 300) \text{ N} = 120 \text{ N}$$

$$\sum M_O \leq 0, \quad F'_{s1} \cdot (R + r) \leq F(R - r)$$

$$F \geq \frac{R + r}{R - r} F'_{s1} = 240 \text{ N}$$

$$F_{\min} = 240 \text{ N}$$

此时轮 C 顺时针转， D 处相对滑动，摩擦力达最大， O 处纯滚，显然 O 处要滑动需更大的力 F 。

5-16 构件 1 和 2 用楔块 3 连接，已知楔块与构件间的摩擦因数 $f_s = 0.1$ ，楔块自重不计。求能自锁的倾斜角 θ 。

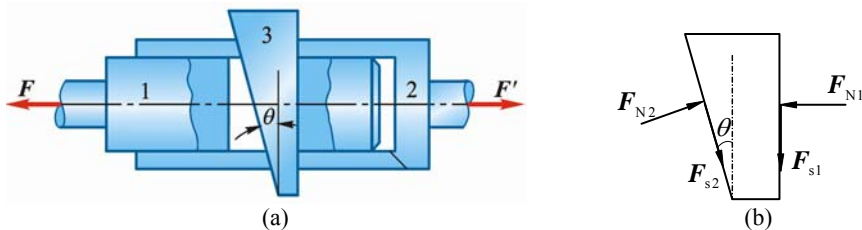


图 5-16

解 楔体为研究对象，受力如图 5-16b 所示。列平衡方程：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} \cos \theta + F_{s2} \sin \theta - F_{N1} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N2} \sin \theta - F_{s2} \cos \theta - F_{s1} = 0 \quad (2)$$

摩擦定律：

$$F_{s1} \leq f_s F_{N1} \quad (3)$$

$$F_{s2} \leq f_s F_{N2} \quad (4)$$

式 (3)、(4) 代入式 (1)、(2)，得

$$F_{N2} (\cos \theta + f_s \sin \theta) \geq F_{N1}$$

$$F_{N2} (\sin \theta - f_s \cos \theta) \leq f_s F_{N1}$$

由上 2 式得

$$f_s \geq \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} = \frac{\tan \theta - f_s}{1 + f_s \tan \theta}$$

推得

$$\tan \theta \leq \frac{2f_s}{1-f_s^2} = 0.202$$

$$\theta \leq 11.42^\circ = 11^\circ 25'$$

方法 2: 考虑双面自锁, θ 应小于 2 倍摩擦角, 即

$$\theta \leq 2\varphi_f = 2\arctan f_s = 2\arctan 0.1 = 11.42^\circ = 11^\circ 25'$$

5-17 均质长板 AD 重 P , 长为 4 m, 用 1 短板 BC 支撑, 如图 5-17a 所示。若 $AC = BC = AB = 3$ m, 板 BC 的自重不计。求 A 、 B 、 C 处摩擦角各为多大才能使之保持平衡。

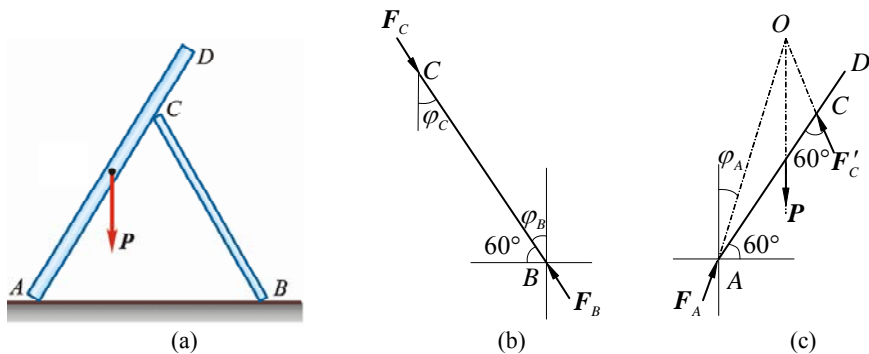


图 5-17

解 (1) 研究对象 BC , 自重不计, 为二力杆, BC 两端全约束力必共线、等值、反向, 如图 5-17b 所示, 临界状态时 φ_B 、 φ_C 为各自摩擦角。

$$\varphi_B = 30^\circ, f_B = \tan 30^\circ = 0.577; \varphi_C = 30^\circ, f_C = 0.577$$

(2) 研究对象 AD , 为三力汇交于点 O 平衡, A 、 C 处全约束力如图 5-17c 所示

$$\frac{OC}{\sin \theta} = \frac{AO}{\sin 120^\circ}, OC = 1 \text{ m}$$

$$AO = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos 120^\circ} = \sqrt{13} \text{ m}$$

$$\sin \theta = \frac{OC}{AO} \sin 120^\circ = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.240, \theta = 13.9^\circ$$

$$\varphi_A = 30^\circ - \theta = 16.1^\circ$$

说明: 本题还可将 A 、 B 、 C 三处全约束力用最大静摩擦力和法向约束力表示, 用解析法, 列平衡方程联立求解可得同样结果。

5-18 尖劈顶重装置如图 5-18a 所示。在块 B 上受力 P 的作用。块 A 与 B 间的摩擦因数为 f_s (其他有滚珠处表示光滑)。如不计块 A 和 B 的重力, 求使系统保持平衡的力 F 的值。

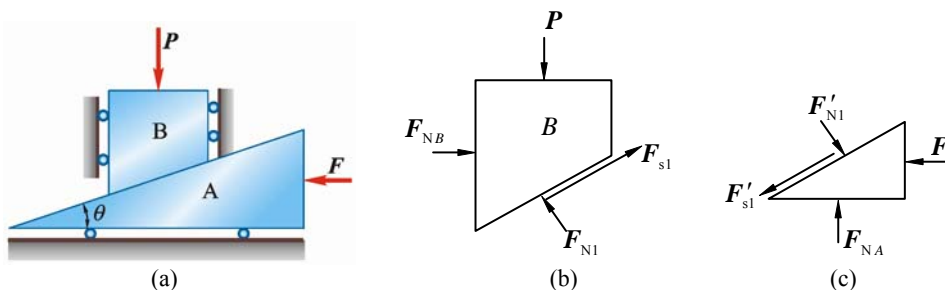


图 5-18

解 (1) 求刚能顶住重物不下降所需 F 的最小值。

① 块 B 为研究对象, 块 B 几乎要下滑, 受力如图 5-18b 所示

$$\sum F_y = 0, F_{Nl} \cos \theta + F_{sl} \sin \theta - P = 0 \quad (1)$$

② 块 A 为研究对象, 受力如图 5-18c 所示

$$\sum F_x = 0, -F_{s1} \cos \theta + F_{N1} \sin \theta - F = 0 \quad (2)$$

摩擦定律:

$$F_{s1} \leq f_s F_{N1} \quad (3)$$

解得

$$F_{\min} = \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} P$$

(2) 求顶住重物但还不致向上升所允许的 F 的最大值。

① 块 B 为研究对象, 块 B 刚要上滑, 受力图是将图 5-18b 中的 F'_{s1} 画成反向, 得

$$\sum F_y = 0, F_{N2} \cos \theta - F_{s2} \sin \theta - P = 0 \quad (4)$$

② 块 A 为研究对象, 受力图是将图 5-18c 中的 F_{s1} 画成反向, 得

$$\sum F_x = 0, F_{s2} \cos \theta + F_{N2} \sin \theta - F = 0 \quad (5)$$

摩擦定律:

$$F_{s2} = f_s F_{N2} \quad (6)$$

解得

$$F_{\max} = \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta}$$

5-19 1 半径为 R , 重为 P_1 的轮静止在水平面上, 如图 5-19a 所示。在轮上半径为 r 的轴上缠有细绳, 此细绳跨过滑轮 A , 在端部系 1 重为 P_2 的物体。绳的 AB 部分与铅直线成 θ 角。求轮与水平面接触点 C 处的滚动摩擦力偶矩、滑动摩擦力和法向反作用力。

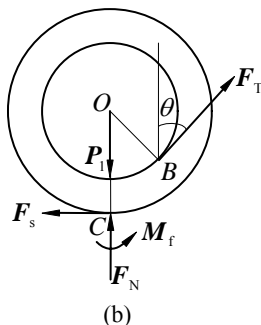
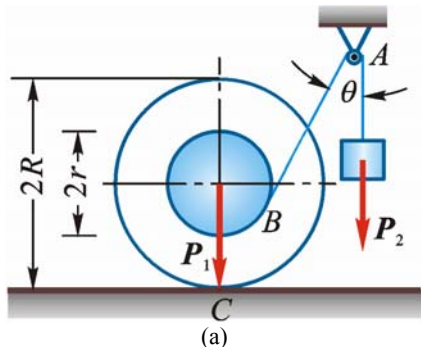


图 5-19

解 (1) 取重物为研究对象, 显然绳中张力为

$$F_T = P_2$$

(2) 取轮子为研究对象, 受力如图 5-19b 所示。图中 M_f 为滚阻力偶矩。设轮子处于平衡状态。平衡方程为

$$\sum F_x = 0, F_T \sin \theta - F_s = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_N + F_T \cos \theta - P_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O = 0, M_f + F_T r - F_s R = 0 \quad (3)$$

式 (1)、(2)、(3) 联立, 解得

$$F_s = P_2 \sin \theta, F_N = P_1 - P_2 \cos \theta, M_f = P_2 (R \sin \theta - r)$$

***5-20** 汽车重力 $P = 15 \text{ kN}$, 车轮的直径为 600 mm , 轮自重不计。问发动机应给予后轮多大的力偶矩, 方能使前轮越过高为 80 mm 的阻碍物? 并问此后轮与地面的静摩擦因数应为多大才不至打滑?

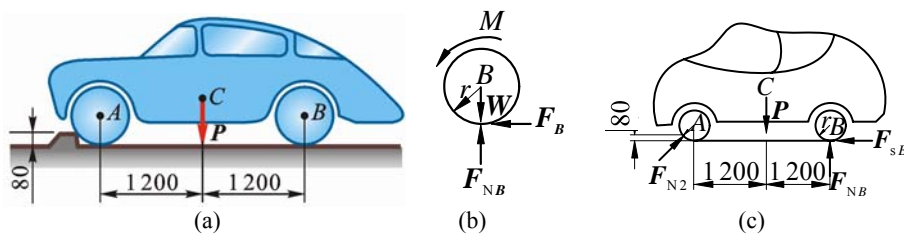


图 5-20

解 (1) 后轮 B 为研究对象, 受力如图 5-20b 所示 ($W = 0$)

$$\sum M_B = 0, \quad F_B = \frac{M}{r} \quad (1)$$

(2) 整体为研究对象, 受力如图 5-20c 所示 (图中, $F_{sB} = F_B$), 忽略轮 A (从动轮) 处滑动摩擦力, 并考虑到以汽车整体为研究对象时, 发动机加给后轮的力偶矩为内力, 所以与图 5-20b 不同。另外后轮为主动轮, 摩擦力较大, 方向朝前; 前轮为从动轮, 摩擦力朝后, 一般较小, 故忽略。

$$\sum M_A = 0, \quad -P \times 1200 + F_{NB} \times 2400 - F_B \times 300 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_y = 0, \quad F_{NA} \cos \varphi + F_{NB} = P \quad (3)$$

$$\sum M_z = 0, \quad F_{NA} \sin \varphi = F_B, \quad F_{NA} = \frac{F_B}{\sin \varphi} \quad (4)$$

式 (4) 代入式 (3), 得

$$\frac{F_B}{\sin \varphi} + F_{NB} = P, \quad F_{NB} = P - F_B \cot \varphi \quad (5)$$

式 (4) 代入式 (1), 得

$$(P - F_B \cot \varphi) \times 2400 - F_B \times 300 = 1200P$$

即

$$(P - F_B \cot \varphi) \times 8 - F_B = 4P$$

$$F_B = \frac{4P}{1 + 8 \cot \varphi} = \left(\frac{4 \times 15}{1 + 8 \times \frac{220}{204}} \right) \text{ kN} = 6.23 \text{ kN}$$

代入式 (4), 得

$$F_{NB} = \left(15 - 6.23 \times \frac{220}{204} \right) \text{ kN} = 8.28 \text{ kN}$$

$$F_B \leq f_s F_{NB}$$

$$f_s \geq \frac{F_B}{F_{NB}} = \frac{6.23}{8.28} = 0.752$$

$$M = F_B r = (6.23 \times 0.3) \text{ N} \cdot \text{m} = 1.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5-21 如图 5-21a 所示, 钢管车间的钢管运转台架, 依靠钢管自重缓慢载无滑动地滚下, 钢管直径为 50 mm。设钢管与台架间的滚动摩擦系数 $\delta = 0.5 \text{ mm}$ 。试决定台架的最小倾角 θ 应为多大?



图 5-21

解 钢管为研究对象, 受力及坐标系如图 5-21b 所示。在倾角 θ 时钢管刚能慢慢滚下, 即 θ 是使钢管产生滚动的最小倾角, 认为在 θ 角时钢管仍平衡, 平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad F_s - P \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - P \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O = 0, \quad F_s R - F_N \delta = 0 \quad (3)$$

由式 (1)、(2) 得

$$\frac{F_s}{F_N} = \tan \theta$$

由式 (3) 得

$$\frac{F_s}{F_N} = \frac{\delta}{R}$$

比较式 (4)、(5) 得

$$\tan \theta = \frac{\delta}{R}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{R}\right) = \tan^{-1}(0.02) = 1^\circ 9'$$

5-22 重 50 N 的方块放在倾斜的粗糙面上, 斜面的边 AB 与 BC 垂直, 如图 5-22a 所示。如在方块上作用水平力 F 与 BC 边平行, 此力由零逐渐增加, 方块与斜面间的静摩擦因数为 0.6。求保持方块平衡时, 水平力 F 的最大值。

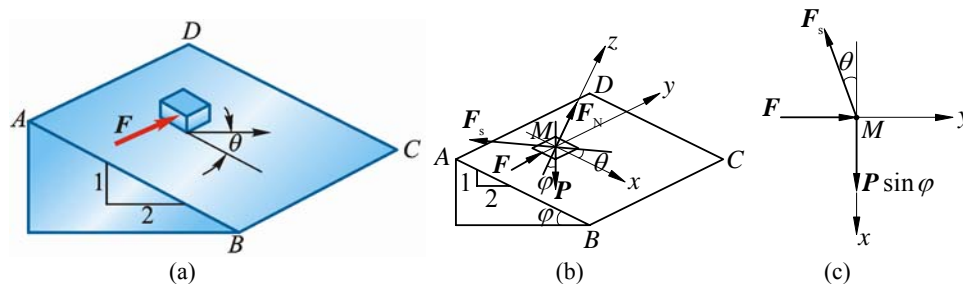


图 5-22

解 方块 M 为研究对象, 受力如图 5-22b 所示。

$$\sum F_z = 0, \quad F_N = P \cos \varphi, \quad F_{s \max} = f_s F_N = 0.6 P \cos \varphi$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{s \max} \cos \theta = P \sin \varphi$$

$$\cos \theta = \frac{P \sin \varphi}{0.6 P \cos \varphi} = \frac{\tan \varphi}{0.6} = \frac{1}{1.2}, \quad \theta = 33.56^\circ$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{s \max} \sin \theta = F$$

$$F = 0.6 P \cos \varphi \sin \theta = 0.6 \times 50 \text{ N} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 33.56^\circ = 14.8 \text{ N}$$

5-23 图中均质杆 AB 长 l , 重力 P , A 端由 1 球形铰链固定在地面上, B 端自由地靠在

1 铅直墙面上，墙面与铰链 A 的水平距离等于 a ，图中平面 AOB 与 yOz 的交角为 θ 。杆 AB 与墙面间的摩擦因数为 f_s ，铰链的摩擦阻力可不计。求杆 AB 将开始沿墙滑动时， θ 角应等于多大？

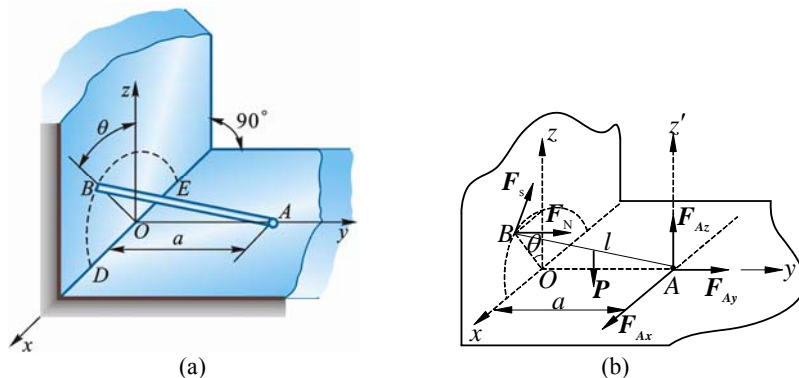


图 5-23

解 杆 AB 为研究对象，受力及坐标系如图 5-23b 所示。由于杆长不变， AO 与墙垂直，杆端 B 在墙上只能沿以 O 为圆心的圆周滑动，此圆的半径为

$$r = \sqrt{l^2 - a^2} \quad (1)$$

点 B 的摩擦力只能沿圆的切向，且与水平面夹 θ 角。

$$\sum M_{Az} = 0, \quad F_N r \sin \theta - F \cos \theta \cdot a = 0 \quad (2)$$

摩擦定律：

$$F_s = f_s F_N \quad (3)$$

解式 (1)、(2)、(3) 联立，得

$$\tan \theta = \frac{F_s a}{F_N r} = \frac{f_s a}{\sqrt{l^2 - a^2}}$$

5-24 皮带制动器如图 5-24a 所示，皮带绕过制动轮而连接于固定点 C 及水平杠杆的 E 端，皮带绕于轮上的包角 $\theta = 225^\circ = 1.25\pi$ （弧度），皮带与轮间的摩擦因数为 $f_s = 0.5$ ，轮半径 $a = 100 \text{ mm}$ 。如在水平杆 D 端施加 1 铅垂力 $F = 100 \text{ N}$ ，求皮带对于制动轮的制动力矩 M_f 的最大值。

提示：轮与皮带间将发生滑动时，皮带两端拉力的关系为 $F_2 = F_1 e^{f_s \theta}$ 。其中 θ 为包角，以弧度计， f_s 为摩擦因数。

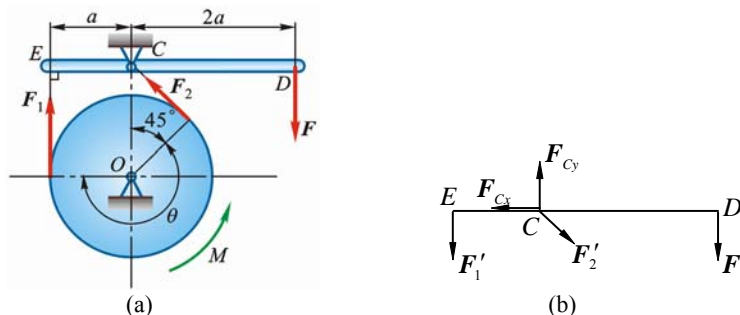


图 5-24

解 研究对象为杆 ECD ，受力如图 5-24b 所示。

$$\sum M_C = 0, \quad F'_1 = 2F, \quad F'_1 = 2F = 200 \text{ N}$$

$$F_2 = F_1 e^{f_s \theta} = 200 e^{0.5 \times 1.25\pi} = 200 e^{1.9635} = 1425 \text{ N}$$

$$M_f = (F_2 - F_1)a = [(1425 - 200) \times 0.1] \text{ N} \cdot \text{m} = 122.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

第六章 点的运动学

6-1 图 6-1 所示为曲线规尺的各杆，长为 $OA = AB = 200 \text{ mm}$ ， $CD = DE = AC = AE = 50 \text{ mm}$ 。如杆 OA 以等角速度 $\omega = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$ 绕 O 轴转动，并且当运动开始时，杆 OA 水平向右，求尺上点 D 的运动方程和轨迹。

解 如图所示 $\angle AOB = \omega t$ ，则点 D 坐标为

$$x_D = OA \cos \omega t, \quad y_D = OA \sin \omega t - 2AC \sin \omega t$$

代入数据，得到点 D 的运动方程为：

$$x = 200 \cos \frac{\pi t}{5} \text{ mm}, \quad y = 100 \sin \frac{\pi t}{5} \text{ mm}$$

把以上两式消去 t 得点 D 轨迹方程：

$$\frac{x^2}{40000} + \frac{y^2}{10000} = 1 \quad (\text{坐标单位: mm})$$

因此， D 点轨迹为中心在 $(0, 0)$ ，长半轴为 0.2 m ，短半轴为 0.1 m 的椭圆。

6-2 如图 6-2 所示，杆 AB 长 l ，以等角速度 ω 绕点 B 转动，其转动方程为 $\varphi = \omega t$ 。而与杆连接的滑块 B 按规律 $s = a + b \sin \omega t$ 沿水平线作谐振动，其中 a 和 b 为常数。求点 A 的轨迹。

$$\text{解} \quad \begin{cases} x_A = a + b \sin \omega t + l \sin \omega t \\ y_A = -l \cos \omega t \end{cases}$$

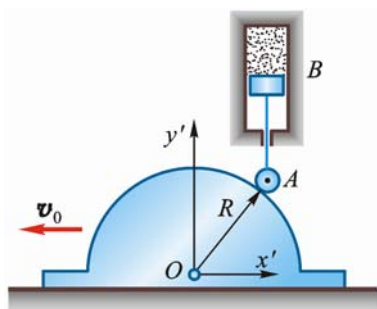
$$\text{即} \quad \begin{cases} (x_A - a) = (b + l) \sin \omega t \\ y_A = -l \cos \omega t \end{cases}$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} \frac{x_A - a}{b + l} = \sin \omega t \\ \frac{y_A}{l} = -\cos \omega t \end{cases}$$

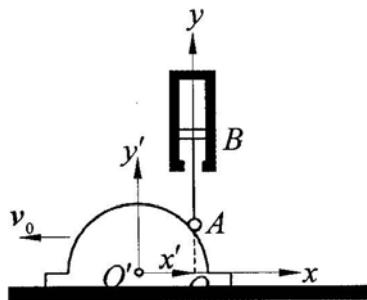
上两式两边平方后相加，得

$$\frac{(x_A - a)^2}{(b + l)^2} + \frac{y_A^2}{l^2} = 1 \quad (\text{点 } A \text{ 的轨迹为椭圆})$$

6-3 如图 6-3 所示，半圆形凸轮以等速 $v_0 = 0.01 \text{ m/s}$ 沿水平方向向左运动，而使活塞杆 AB 沿铅直方向运动。当运动开始时，活塞杆 A 端在凸轮的最高点上。如凸轮的半径 $R = 80 \text{ mm}$ ，求活塞上 A 端相对于地面和相对于凸轮的运动方程和速度，并作出其运动图和速度图。



(a)



(b)

图 6-3

解 1) A 相对于地面运动

把直角坐标系 xOy 固连在地面上, 如图 6-3b 所示, 则 A 点的运动方程为

$$x = 0, \quad y = \sqrt{R^2 - v_0^2 t^2} = 0.01\sqrt{64 - t^2} \text{ m} \quad (0 \leq t \leq 8)$$

$$A \text{ 的速度 } v_x = \dot{x} = 0, \quad v_y = \dot{y} = -\frac{0.01t}{\sqrt{64 - t^2}} \text{ m/s}$$

A 的运动图 ($y-t$ 曲线) 及速度图 (v_y-t 曲线) 如图 6-3b 的左部。

2) A 相对于凸轮运动

把直角坐标系 $x'O'y'$ 固连于凸轮上, 则点 A 的运动方程为

$$x' = v_0 t = 0.01t \text{ m}, \quad y' = 0.01\sqrt{64 - t^2} \text{ m} \quad (0 \leq t \leq 8)$$

$$A \text{ 相对于凸轮的速度 } v'_x = \dot{x}' = 0.01 \text{ m/s}, \quad v'_y = \dot{y}' = -\frac{0.01t}{\sqrt{64 - t^2}} \text{ m/s}$$

运动图 ($y'-t$ 及 $x'-t$ 曲线) 及速度图 (v'_y-t 及 v'_x-t 曲线) 如图 6-3b 的中右部所示。

6-4 图 6-4 所示雷达在距离火箭发射台为 l 的 O 处观察铅直上升的火箭发射, 测得角 θ 的规律为 $\theta = kt$ (k 为常数)。试写出火箭的运动方程并计算当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 时, 火箭的速度和加速度。

解 如图 6-4 所示在任意瞬时 t 火箭的坐标为

$$x = l, \quad y = l \tan \theta = l \tan kt$$

这就是火箭的运动方程。

分别对 t 求一次及二次导数:

$$\dot{x} = 0, \quad \ddot{x} = 0;$$

$$\dot{y} = lk \sec^2 kt, \quad \ddot{y} = 2lk^2 \sec^2 kt \tan kt$$

$$\text{当 } \theta = kt = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } v = \frac{4}{3}lk, \quad a = \frac{8\sqrt{3}}{9}lk^2$$

$$\text{当 } \theta = kt = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } v = 4lk, \quad a = 8\sqrt{3}lk^2$$

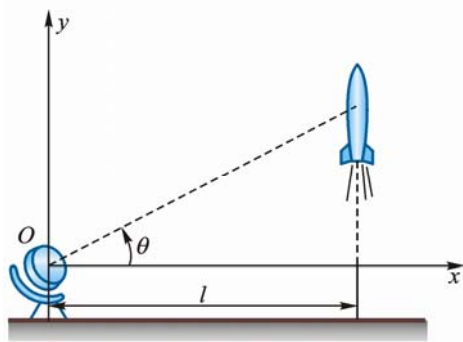


图 6-4

6-5 套管 A 由绕过定滑轮 B 的绳索牵引而沿导轨上升, 滑轮中心到导轨的距离为 l , 如图 6-5 所示。设绳索以等速 v_0 拉下, 忽略滑轮尺寸, 求套管 A 的速度和加速度与距离 x 的关系式。

解 设绳段 AB 原长 s_0 , 在任意瞬时长为 s , 则

$$BA = s = s_0 - v_0 t, \quad \frac{ds}{dt} = -v_0 \quad (1)$$

又设 Ox 轴的原点 O , 方向如图。由几何关系知:

$$s = \sqrt{l^2 + x^2}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{l^2 + x^2}} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 解得套管 A 的速度:

$$\dot{x} = -\frac{v_0 \sqrt{l^2 + x^2}}{x}$$

$$\text{加速度: } a = \ddot{x} = -\frac{v_0^2 l^2}{x^3}$$

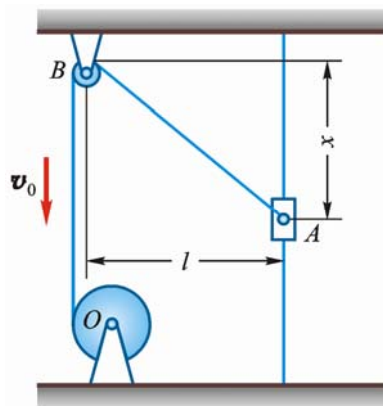


图 6-5

6-6 如图 6-6a 所示, 偏心凸轮半径为 R , 绕 O 轴转动, 转角 $\varphi = \omega t$ (ω 为常量), 偏心距 $OC=e$, 凸轮带动顶杆 AB 沿铅垂直线作往复运动。试求顶杆的运动方程和速度。

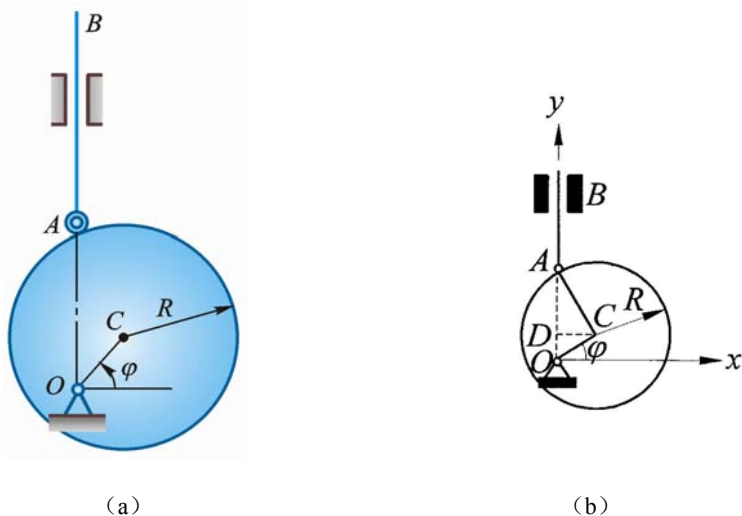


图 6-6

解 建立如图 6-6b 所示直角坐标系 xOy , 设初始瞬时 $\varphi = 0$, 在任意瞬时 A 点纵坐标为

$$y = OA = OD + DA = OD + \sqrt{AC^2 - CD^2}$$

$$\text{即 } y = e \sin \omega t + \sqrt{R^2 - e^2 \cos^2 \omega t}$$

此即顶杆 AB 的运动方程。把运动方程对 t 求导, 得顶杆速度得

$$v = \dot{y} = e\omega \cos \omega t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^2 \sin \omega t \cos \omega t \cdot \omega}{\sqrt{R^2 - e^2 \cos^2 \omega t}} = e\omega \left[\cos \omega t + \frac{e \sin 2\omega t}{2\sqrt{R^2 - e^2 \cos^2 \omega t}} \right]$$

6-7 图示摇杆滑道机构中的滑块 M 同时在固定的圆弧槽 BC 和摇杆 OA 的滑道中滑动。如弧 BC 的半径为 R , 摇杆 OA 的轴 O 在弧 BC 的圆周上。摇杆绕 O 轴以等角速度 ω 转动, 当运动开始时, 摇杆在水平位置。试分别用直角坐标法和自然法给出点 M 的运动方程, 并求其速度和加速度。

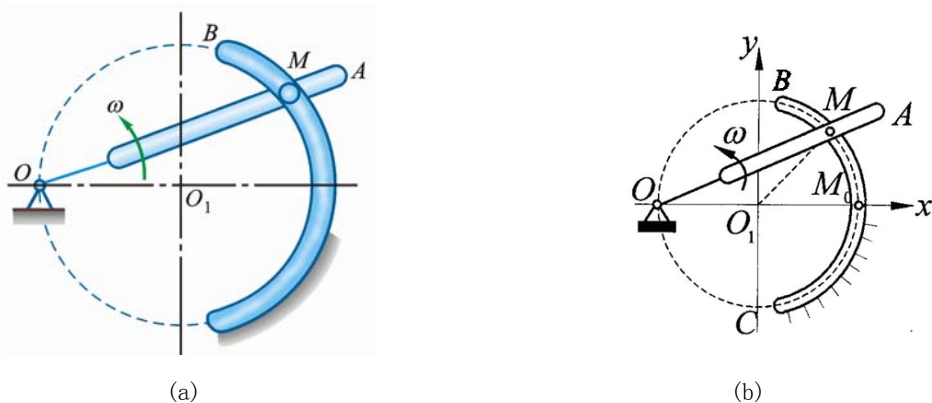


图 6-7

解 (1) 坐标法

建立如图 6-7b 所示的坐标系 xO_1y , 由于 $\angle AOx = \omega t$, 则 $\angle MO_1x = 2\omega t$

故 M 点的运动方程为 $x = R \cos 2\omega t$, $y = R \sin 2\omega t$

于是 $\dot{x} = -2R\omega \sin 2\omega t$, $\dot{y} = 2R\omega \cos 2\omega t$

$$\ddot{x} = -4R\omega^2 \cos 2\omega t, \quad \ddot{y} = -4R\omega^2 \sin 2\omega t$$

故得 $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2R\omega$ 及 $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 4R\omega^2$

(2) 自然法

当 $t = 0$ 时, M 点在 M_0 点处, 以 M_0 为弧坐标 M_0M 的原点, 如图 6-7a 所示。

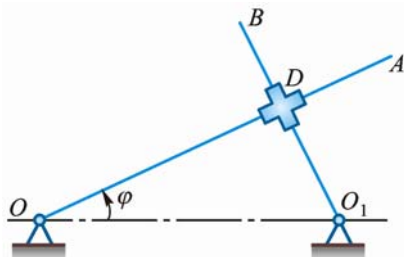
$$M_0\widehat{M} = s = R \cdot \angle M_0M = 2R\omega t$$

M 点运动方程: $s = 2R\omega t$

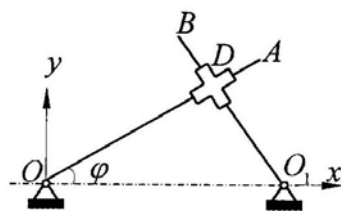
M 点的速度: $v = \dot{s} = 2R\omega$

M 点的加速度: $a_t = \ddot{s} = 0$, $a_n = \frac{v^2}{R} = 4\omega^2 R$, $a = 4\omega^2 R$

6-8 如图 6-8a 所示, OA 和 O_1B 两杆分别绕 O 和 O_1 轴转动, 用十字形滑块 D 将两杆连接。在运动过程中, 两杆保持相交成直角。已知: $OO_1 = a$; $\varphi = kt$, 其中 k 为常数。求滑块 D 的速度和相对于 OA 的速度。



(a)



(b)

图 6-8

解 建立如图 6-8b 所示的坐标系 xOy 。

由于 $\angle ODO_1 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $OD = a \cos \varphi = a \cos kt$

滑动 D 的运动方程为

$$x = a \cos kt \cdot \cos kt = \frac{a}{2}(1 + \cos 2kt)$$

$$y = a \cos kt \cdot \sin kt = \frac{a}{2} \sin 2kt$$

则 $\dot{x} = -ak \cdot \sin 2kt$, $\dot{y} = ak \cdot \cos 2kt$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = ak$$

滑块 D 相对 OA 的速度 $v_r = \frac{d(OD)}{dt} = -ak \sin kt$

6-9 曲柄 OA 长 r , 在平面内绕 O 轴转动, 如图 6-9 所示。杆 AB 通过固定于点 N 的套筒与曲柄 OA 铰接于点 A 。设 $\varphi = \omega t$, 杆 AB 长 $l = 2r$, 求点 B 的运动方程、速度和加速度。

解 $l = 2r$

$$\begin{cases} x = r + (l - 2r \sin \frac{\omega t}{2}) \sin \frac{\omega t}{2} \\ y = -(l - 2r \sin \frac{\omega t}{2}) \cos \frac{\omega t}{2} \end{cases}$$

即

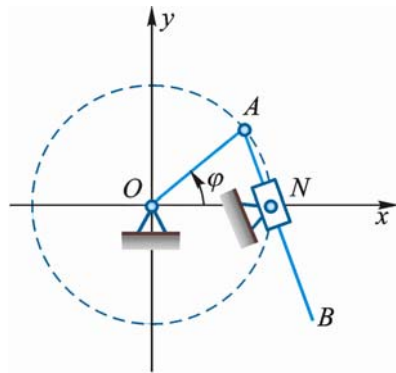


图 6-9

$$\begin{cases} x = r + l \sin \frac{\omega t}{2} - 2r \sin^2 \frac{\omega t}{2} = l \sin \frac{\omega t}{2} + r \cos \omega t = r(\cos \omega t + 2 \sin \frac{\omega t}{2}) \\ y = -l \cos \frac{\omega t}{2} + r \sin \omega t = r(\sin \omega t - 2 \cos \frac{\omega t}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = l \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2} - r \omega \sin \omega t = r \omega (\cos \frac{\omega t}{2} - \sin \omega t) \\ \dot{y} = r \omega \cos \omega t + l \cdot \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} = r \omega (\cos \omega t + \sin \frac{\omega t}{2}) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r \omega \sqrt{2 - 2 \sin \frac{\omega t}{2}}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = r \omega (-\frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} - \omega \cos \omega t) = -\frac{r \omega^2}{2} (\sin \frac{\omega t}{2} + 2 \cos \omega t) \\ \ddot{y} = r \omega (-\omega \sin \omega t + \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2}) = \frac{r \omega^2}{2} (\cos \frac{\omega t}{2} - 2 \sin \omega t) \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{r \omega^2}{2} \sqrt{5 - 4 \sin \frac{\omega t}{2}}$$

6-10 点沿空间曲线运动，在点 M 处其速度 $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ，加速度 \mathbf{a} 与速度 \mathbf{v} 的夹角 $\beta = 30^\circ$ ，且 $a = 10 \text{ m/s}^2$ 。试计算轨迹在该点密切面内的曲率半径 ρ 和切向加速度 a_t 。

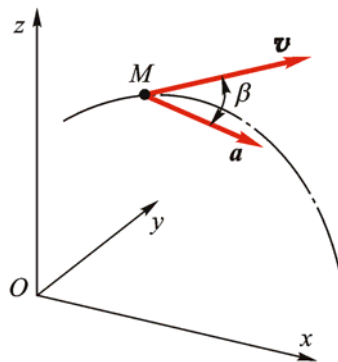


图 6-10

解 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = (\sqrt{4^2 + 3^2}) \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$

$$a_n = a \sin \beta = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \left(\frac{5^2}{5} \right) \text{ m} = 5 \text{ m}$$

$$a_t = a \cos \beta = 8.66 \text{ m/s}^2$$

6-11 小环 M 由作平动的 Γ 形杆 ABC 带动，沿着图 6-11 所示曲线轨道运动。设杆 ABC 的速度 v 常数，曲线方程为 $y^2 = 2px$ 。试求环 M 的速度和加速度的大小（写成杆的位移 x 的函数）。

解 由图 6-11 得环 M 的运动方程

$$x = vt$$

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2pvt}$$

速度：由于 $\dot{x} = v$ ， $\dot{y} = \frac{pv}{\sqrt{2px}} = \frac{pv}{y}$

$$v_M = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$$

加速度：由于 $\ddot{x} = 0$ ， $\ddot{y} = -\frac{p\dot{v}}{y^2} = -\frac{v^2}{4x} \sqrt{\frac{2p}{x}}$

$$a_M = \ddot{y} = -\frac{v^2}{4x} \sqrt{\frac{2p}{x}}$$

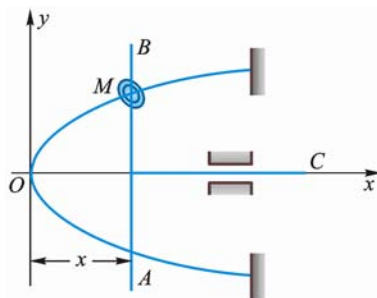


图 6-11

6-12 如图 6-12 所示，一直杆以匀角速度 ω_0 绕其固定端 O 转动，沿此杆有一滑块以匀速 v_0 滑动。设运动开始时，杆在水平位置，滑块在点 O 。求滑块的轨迹（以极坐标表示）。

解 以 O 为原点，建立极坐标， M 点运动方程为

$$r = v_0 t, \quad \varphi = \omega_0 t$$

由上式消去 t ，得轨迹方程： $r = \frac{v_0}{\omega_0} \varphi$

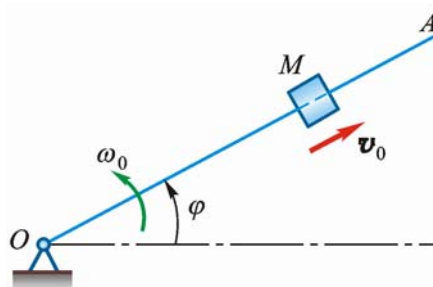


图 6-12

****6-13** 如果上题中的滑块 M 沿杆运动的速度与距离 OM 成正比，比例常数为 k ，试求滑块的轨迹（以极坐标 r, φ 表示，假定 $\varphi = 0$ 时 $r = r_0$ ）。

解 根据题意

$$\dot{r} = kr$$

故

$$\frac{dr}{r} = k dt$$

两边积分

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \int_0^t k dt$$

得

$$r = r_0 e^{kt}$$

把 $\varphi = \omega t$ 代入上式得滑块的轨迹方程 $r = r_0 e^{\frac{k}{\omega} \varphi}$

****6-14** 如图 6-13 所示螺线画规的杆 QQ' 和曲柄 OA 铰接，并穿过固定于点 B 的套筒。取点 B 为极坐标系的极点，直线 BO 为极轴，已知极角 $\varphi = kt$ (k 为常数)， $BO = AO = a$ ， $AM = b$ 。试求点 M 的极坐标形式的运动方程、轨迹方程以及速度和加速度的大小。

解 依题意 M 点的运动方程为：

$$r = b + 2a \cos \varphi, \quad \varphi = kt$$

消去 t 得轨迹方程： $r = b + 2a \cos \varphi$

因此， M 点的轨迹为一螺旋线。由于

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -2ak \sin kt$$

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = 2ak \cos kt + kb$$

因此速度为

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = k \sqrt{4a^2 + b^2 + 4ab \cos kt}$$

由于 $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -4ak^2 \cos kt - k^2 b$

$$a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = -4ak^2 \sin kt$$

加速度为

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = k^2 \sqrt{16a^2 + b^2 + 8ab \cos kt}$$

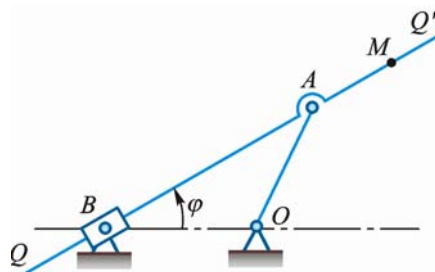


图 6-13

****6-15** 图 6-14 所示搅拌器沿 z 轴周期性上下运动， $z = z_0 \sin 2\pi f t$ ，并绕 z 轴转动，转角 $\varphi = \omega t$ 。设搅拌轮半径为 r ，求轮缘上点 A 的最大加速度。

解 $\dot{\varphi} = \omega$ ， $a_r = r\omega^2$

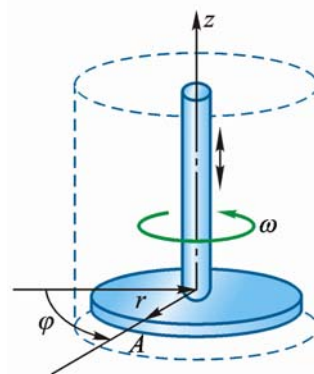
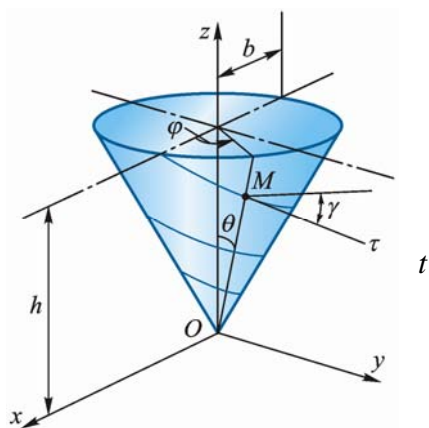


图 6-14

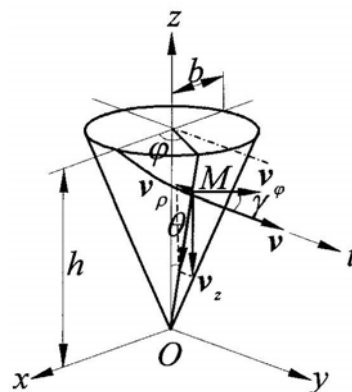
$$\ddot{z} = -z_0 (2\pi f)^2 \sin 2\pi ft, \quad \ddot{z}_{\max} = z_0 4\pi^2 f^2$$

$$a_{\max} = \sqrt{a_r^2 + \ddot{z}_{\max}^2} = \sqrt{r^2 \omega^4 + 16\pi^4 f^4 z_0^2}$$

****6-16** 点 M 沿正圆锥面上的螺旋轨道向下运动。正圆锥的底半径为 b ，高为 h ，半顶角为 θ ，如图 6-15 所示。螺旋线上任意点的切线与该点圆锥面的水平切线的夹角 γ 是常数，且点 M 运动时，其柱坐标角对时间的导数 $\dot{\varphi}$ 保持为常数。求在任意角 φ 时，加速度在柱坐标中的投影 a_ρ 的值。



(a)



(b)

图 6-15

解 $v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad \frac{v_\rho}{v_z} = \tan \theta$

即 $\frac{\dot{\rho}(t)}{\dot{z}(t)} = \tan \theta, \quad \dot{\rho} = \dot{z} \tan \theta, \quad \tan \gamma = \frac{\sqrt{v_\rho^2 + v_z^2}}{v_\varphi}$

即 $\rho \dot{\varphi} \tan \gamma = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2} \quad (\dot{\rho} < 0)$

$$\rho \dot{\varphi} \tan \gamma = -\sqrt{1 + \cot^2 \theta} \dot{\rho}$$

$$\rho \dot{\varphi} \tan \gamma = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\dot{\varphi} \tan \gamma \cdot \sin \theta \cdot dt$$

积分 $\ln \rho = -\dot{\varphi} \tan \gamma \sin \theta \cdot t + c$

$t = 0$ 时, $\rho = b, \quad c = \ln b$

$$\ln \frac{\rho}{b} = -\dot{\varphi} \cdot \tan \gamma \sin \theta \cdot t$$

$$\rho = b e^{-\dot{\varphi} \tan \gamma \sin \theta \cdot t}$$

$$\dot{\rho} = -b \dot{\varphi} \tan \gamma \sin \theta e^{-\dot{\varphi} \tan \gamma \sin \theta \cdot t}$$

$$\ddot{\rho} = b \dot{\varphi}^2 \tan^2 \gamma \sin^2 \theta \cdot e^{-\dot{\varphi} \tan \gamma \sin \theta \cdot t}$$

$$\varphi = \dot{\varphi} t$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = b \dot{\varphi}^2 \tan^2 \gamma \sin^2 \theta \cdot e^{\tan \gamma \sin \theta \cdot \varphi} - \rho \dot{\varphi}^2$$

$$= b\dot{\varphi}^2 e^{-\tan \gamma \sin \theta \cdot \varphi} (\tan^2 \gamma \sin^2 \theta - 1)$$

式中 $\tan \theta = \frac{b}{h}$

****6-17** 图 6-16 所示公园游戏车 M 固结在长为 R 的臂杆 OM 上, 臂杆 OM 绕铅垂轴 z 以恒定的角速度 $\dot{\varphi} = \omega$ 转动, 小车 M 的高度 z 与转角 φ 的关系为 $z = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\varphi)$ 。求 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, 小车 M 在球坐标系的各速度分量: v_r , v_θ , v_φ 。

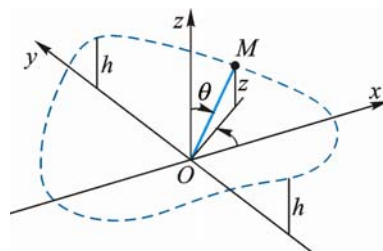


图 6-16

解 由 $z = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\varphi)$,

$$\cos \theta = \frac{z}{R} = \frac{h}{2R}(1 - \cos 2\varphi)$$

对 t 求导: $-\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2R} \sin 2\varphi \cdot 2 \frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{h \sin 2\varphi}{R \sin \theta} \omega$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad z = \frac{h}{2}, \quad \cos \theta = \frac{h}{2R}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-h\omega}{R\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0$$

$$v_\theta = R \frac{d\theta}{dt} = -\frac{h\omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}}$$

$$v_\varphi = R \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2R}\right)^2}$$

第7章 刚体的简单运动

7-1 图 7-1a 所示曲柄滑杆机构中，滑杆有 1 圆弧形滑道，其半径 $R = 100 \text{ mm}$ ，圆心 O_1 在导杆 BC 上。曲柄长 $OA = 100 \text{ mm}$ ，以等角速度 $\omega = 4 \text{ rad/s}$ 绕轴 O 转动。求导杆 BC 的运动规律以及当轴柄与水平线间的交角 φ 为 30° 时，导杆 BC 的速度和加速度。

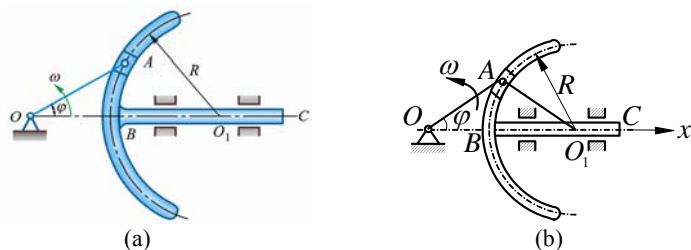


图 7-1

解 建立坐标轴 Ox ，如图 7-1b 所示。导杆上点 O_1 的运动可以代表导杆的运动，点 O_1 的运动方程为

$$x = 2R \cos \varphi = 0.20 \cos 4t \text{ m}$$

对时间 t 求导得

$$\dot{x} = -0.80 \sin 4t \text{ m/s}$$

$$\ddot{x} = -3.20 \cos 4t \text{ m/s}^2$$

当 $\varphi = 4t = 30^\circ$ 时，

$$v_{BC} = \dot{x} = -0.40 \text{ m/s}$$

$$a_{BC} = \ddot{x} = -2.77 \text{ m/s}^2$$

7-2 图 7-2 示为把工件送入干燥炉内的机构，叉杆 $OA = 1.5 \text{ m}$ 在铅垂面内转动，杆 $AB = 0.8 \text{ m}$ ， A 端为铰链， B 端有放置工件的框架。在机构运动时，工件的速度恒为 0.05 m/s ，杆 AB 始终铅垂。设运动开始时，角 $\varphi = 0$ 。求运动过程中角 φ 与时间的关系，以及点 B 的轨迹方程。

解 (1) 求 $\varphi(t)$

AB 平移：

$$v_A = v_B$$

令 $l = OA = 1.5 \text{ m}$ ，则

$$v_B = v_A = l\dot{\varphi}$$

即

$$1.5 \frac{d\varphi}{dt} = 0.05$$

$$d\varphi = \frac{1}{30} dt, \quad \varphi = \frac{1}{30} t + c$$

$$t = 0 \text{ 时}, \quad \varphi = 0, \quad c = 0, \quad \varphi = \frac{1}{30} t$$

$$\begin{cases} x_B = l \cos \varphi \\ y_B = l \sin \varphi - 0.8 \end{cases} \quad (\text{单位: m})$$

点 B 轨迹方程为 $l = 1.5 \text{ m}$

$$x_B^2 + (y_B + 0.8)^2 = 1.5^2 \quad (\text{单位: m})$$

7-3 已知搅拌机的主动齿轮 O_1 以 $n = 950 \text{ r/min}$ 的转速转动。搅杆 ABC 用销钉 A 、 B 与齿轮 O_2 、 O_3 相连，如图 7-3 所示。且 $AB = O_2O_3$ ， $O_3A = O_2B = 0.25 \text{ m}$ ，各齿轮齿数为 $z_1 = 20$ ， $z_2 = 50$ ，

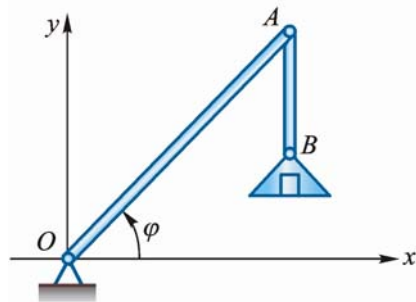


图 7-2

$z_3 = 50$ ，求搅杆端点 C 的速度和轨迹。

解 O_2O_3AB 为平行四边形，搅杆 ABC 作平移，点 C 的运动参数与点 A 相同，显然点 A 的轨迹为 1 个半径为 $O_3A = r = 0.25 \text{ m}$ 的圆。

$$\begin{aligned} v &= O_3A \cdot \omega_3 = O_3A \cdot \frac{z_1}{z_3} \cdot \omega_1 \\ &= 0.25 \times \frac{20}{50} \times \frac{950 \times 2\pi}{60} = 9.95 \text{ m/s} \end{aligned}$$

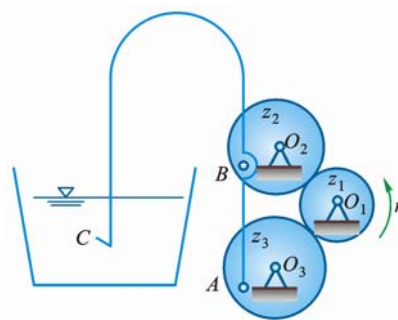


图 7-3

7-4 机构如图 7-4 所示，假定杆 AB 以匀速 v 运动，开始时 $\varphi = 0$ 。求当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时，摇杆 OC 的角速度和角加速度。

解 依题意，在 $\varphi = 0$ 时， A 在 D 处。由几何关系得：

$$\tan \varphi = \frac{vt}{l}$$

两边对时间 t 求导：

$$\dot{\varphi} \sec^2 \varphi = \frac{v}{l}, \quad \dot{\varphi} = \frac{v}{l} \cos^2 \varphi,$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2v}{l} \cos \varphi \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时，杆 OC 的角速度

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{2v}{l} \quad (\text{逆})$$

杆 OC 的角加速度

$$\alpha = \ddot{\varphi} = -\frac{2v}{l} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v}{2l} = -\frac{v^2}{2l^2} \quad (\text{顺})$$

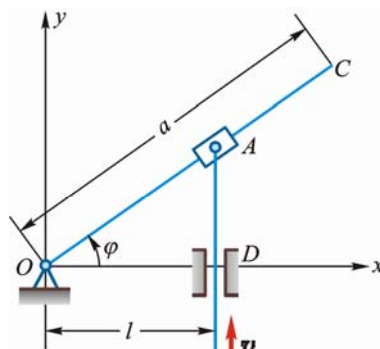


图 7-4

7-5 如图 7-5 所示，曲柄 CB 以等角速度 ω_0 绕轴 C 转动，其转动方程为 $\varphi = \omega_0 t$ 。滑块 B 带动摇杆 OA 绕轴 O 转动。设 $OC = h$ ， $CB = r$ 。求摇杆的转动方程。

解 (1) 曲柄和摇杆均作定轴转动。由 $\triangle OBC$ 知

$$\frac{r}{\sin \theta} = \frac{h}{\sin[180^\circ - (\theta + \varphi)]}$$

得

$$\tan \theta = \frac{r \sin \varphi}{h - r \cos \varphi}$$

注意到 $\varphi = \omega_0 t$ ，得

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \omega_0 t}{\frac{h}{r} - \cos \omega_0 t} \right]$$

(2) 自 B 作直线 BD 垂直相交 CO 于 D ，则

$$\tan \theta = \frac{BD}{DO} = \frac{r \sin \omega_0 t}{h - r \cos \omega_0 t}$$

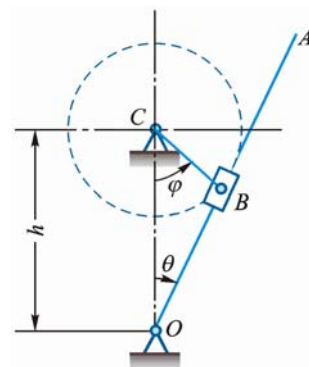


图 7-5

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \omega_0 t}{\frac{h}{r} - \cos \omega_0 t} \right]$$

7-6 如图 7-6 所示，摩擦传动机构的主动轴 I 的转速为 $n = 600 \text{ r/min}$ 。轴 I 的轮盘与轴 II 的轮盘接触，接触点按箭头 A 所示的方向移动。距离 d 的变化规律为 $d = 100 - 5t$ ，其中 d 以 mm 计， t 以 s 计。已知 $r = 50 \text{ mm}$ ， $R = 150 \text{ mm}$ 。求：（1）以距离 d 表示轴 II 的角加速度；（2）当 $d = r$ 时，轮 B 边缘上 1 点的全加速度。

解 （1）两轮接触点的速度以及切向加速度相同

$$\omega_2 d = \omega_1 r$$

故
$$\omega_2 = \frac{r}{d} \omega_1 = \frac{50}{100 - 5t} \cdot \frac{\pi \cdot 600}{30} = \frac{100\pi}{10 - 0.5t} \text{ rad/s}$$

$$\alpha_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1000\pi}{100 - 5t} \right) = \frac{5000\pi}{(100 - 5t)^2}$$

$$= \frac{5000\pi}{d^2} \text{ rad/s}^2$$

（2）轮 B 作定轴转动，当 $d = r$ 时轮缘上 1 点的加速度可如下求得：

$$\omega_2 = \frac{r}{d} \omega_1 = \omega_1 = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha_2 = \frac{5 \times 10^3 \pi}{d^2} = \frac{5 \times 10^3 \pi}{r^2} = 2\pi \text{ rad/s}^2$$

$$a = R \sqrt{\alpha_2^2 + \omega_2^4} = 150 \sqrt{(2\pi)^2 + (20\pi)^4} = 300\pi \sqrt{1 + 40000\pi^2}$$

$$= 592\,000 \text{ mm/s}^2 = 592 \text{ m/s}^2$$

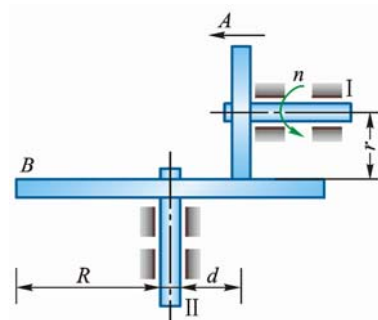


图 7-6

7-7 车床的传动装置如图 7-7 所示。已知各齿轮的齿数分别为： $z_1 = 40$ ， $z_2 = 84$ ， $z_3 = 28$ ， $z_4 = 80$ ；带动刀具的丝杠的螺距为 $h_4 = 12 \text{ mm}$ 。求车刀切削工件的螺距 h_1 。

解 根据齿轮传动比，得

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \omega_2 = \omega_3, \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{84 \cdot 80}{40 \cdot 28} = 6$$

故得
$$h_1 = \frac{h_4}{6} = 2 \text{ mm}$$

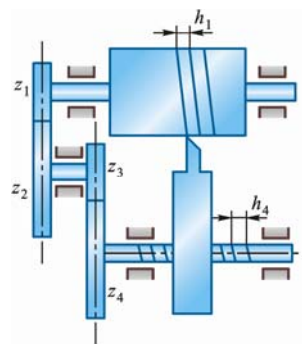


图 7-7

7-8 如图 7-8 所示，纸盘由厚度为 a 的纸条卷成，令纸盘的中心不动，而以等速 v 拉纸条。求纸盘的角加速度（以半径 r 的函数表示）。

解 纸盘作定轴转动，当纸盘转过 $2\pi \text{ rad}$ 时半径减小 a 。设纸盘转过 $d\theta$ 角时半径增加 dr ，则

$$d\theta = \frac{-2\pi}{a} dr$$

纸盘的角速度

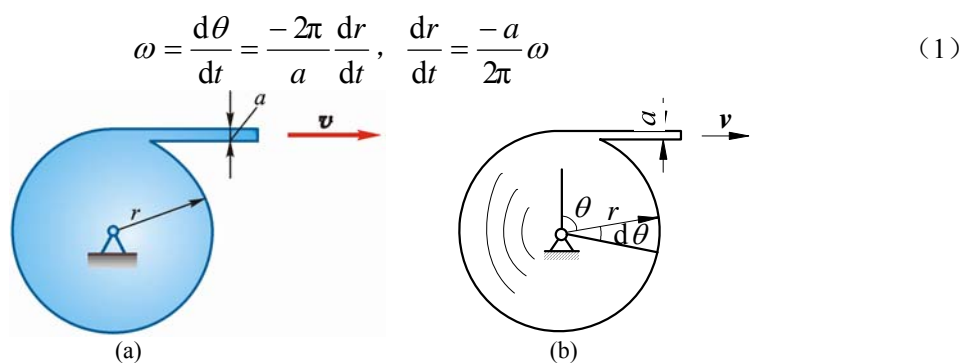


图 7-8

又 $r\omega = v$ ，两边对时间 t 求导：

$$r \frac{d\omega}{dt} + \frac{dr}{dt} \omega = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{\omega} \frac{d\omega}{dt}$$

(2)

即

式 (1) 代入式 (2)，得纸盘的角加速度

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a\omega^2}{2\pi r} = \frac{av^2}{2\pi r^2}$$

7-9 图 7-9 所示机构中齿轮 1 紧固在杆 AC 上， $AB = O_1O_2$ ，齿轮 1 和半径为 r_2 的齿轮 2 啮合，齿轮 2 可绕 O_2 轴转动且和曲柄 O_2B 没有联系。设 $O_1A = O_2B = l$ ， $\varphi = b \sin \omega t$ ，试确定 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ s 时，轮 2 的角速度和角加速度。

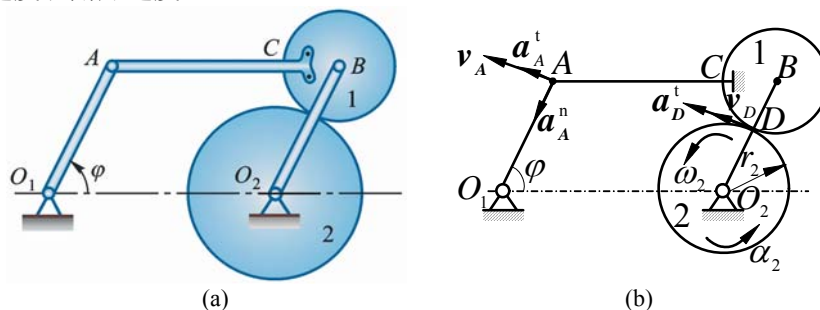


图 7-9

解 AB 平移，所以轮 B 上与轮 2 接触点 D 处：

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A, \quad \mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t$$

因为轮 1、轮 2 啮合，所以轮 2 上点 D 速度与轮 1 上点 D 速度相同，切向加速度也相同。

$$v_A = l\dot{\varphi} = lb\omega \cos \omega t, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{lb\omega \cos \omega t}{r_2} \stackrel{t=\frac{\pi}{2\omega}}{=} 0$$

$$a_A^t = l\ddot{\varphi} = -lb\omega^2 \sin \omega t = -lb\omega^2, \quad \alpha_2 = \frac{a_A^t}{r_2} = -\frac{lb\omega^2}{r_2}$$

7-10 在上题图中，设机构从静止开始转动，轮 2 的角加速度为常数 α_2 。求曲柄 O_1A 的转动规律。

解 轮 1、轮 2 上点 D 切向加速度相同

$$a_D^t = r_2 \alpha_2$$

ACB 平移, 点 A 切向加速度

$$a_A^t = a_D^t$$

$$a_A^t = l\ddot{\varphi}$$

即

$$l\ddot{\varphi} = r_2\alpha_2, \quad \ddot{\varphi} = \frac{r_2}{l}\alpha_2$$

积分, 得

$$\dot{\varphi} = \frac{r_2}{l}\alpha_2 t + C_1, \quad \varphi = \frac{r_2}{2l}\alpha_2 t^2 + C_1 t + C_2$$

初始静止, $t = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $C_1 = 0$, $\varphi = 0$, $C_2 = 0$

$$\varphi = \frac{r_2\alpha_2}{2l}t^2$$

7-11 杆 AB 在铅垂方向以恒速 v 向下运动并由 B 端的小轮带着半径为 R 的圆弧 OC 绕轴 O 转动。如图 7-10a 所示。设运动开始时, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 求此后任意瞬时 t , OC 杆的角速度 ω 和点 C 的速度。

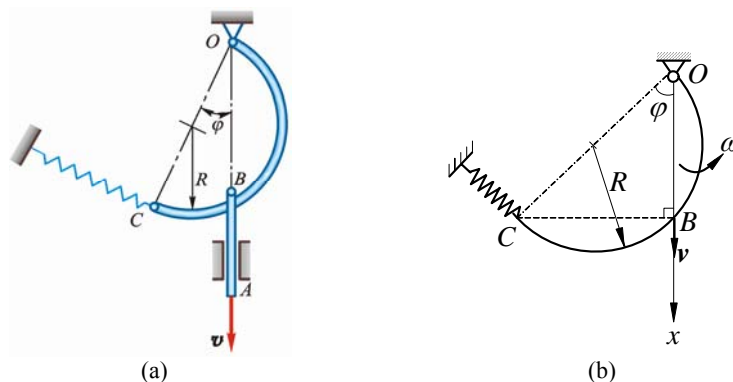


图 7-10

解

$$\angle CBO = \frac{\pi}{2}, \quad x_B = 2R \cos \varphi$$

又

$$x_B(0) = \sqrt{2}R, \quad \dot{x}_B = \sqrt{2}R + vt \quad (\downarrow)$$

由图 7-10b, 得

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(2R)^2 - x_B^2}}{2R} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{2} \frac{vt}{R} - \left(\frac{vt}{R}\right)^2}$$

$$\omega = -\frac{v}{2R \sin \varphi}, \quad v_C = 2R\omega = -\frac{v}{\sin \varphi}$$

7-12 图 7-11a 所示 1 飞轮绕固定轴 O 转动, 其轮上任 1 点的全加速度在某段运动过程中与轮半径的交角恒为 60° , 当运动开始时, 其转角 φ_0 等于零, 角速度为 ω_0 。求飞轮的转动方程以及角速度与转角的关系。

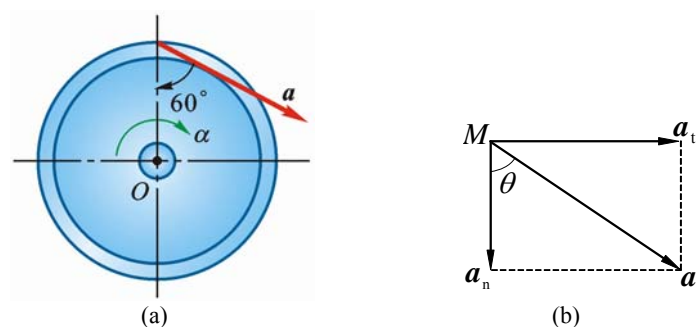


图 7-11

解 设轮缘上任 1 点 M 的全加速度为 \mathbf{a} ，切向加速度 $a_t = r\alpha$ ，法向加速度 $a_n = \omega^2 r$ ，如图 7-11b 所示。

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

把 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ ， $\theta = 60^\circ$ 代入上式，得

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}$$

分离变量后，两边积分：

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2} = \int_0^t \sqrt{3} dt$$

得

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \sqrt{3}\omega_0 t} \quad (1)$$

把 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ 代入上式进行积分

$$\int_0^\varphi d\omega = \int_0^t \frac{\omega_0}{1 - \sqrt{3}\omega_0 t} dt$$

得

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}\omega_0 t} \right) \quad (2)$$

这就是飞轮的转动方程。

式 (1) 代入式 (2)，得

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\omega}{\omega_0}$$

于是飞轮角速度与转角的关系为

$$\omega = \omega_0 e^{\sqrt{3}\varphi}$$

7-13 半径 $R = 100 \text{ mm}$ 的圆盘绕其圆心转动，图 7-12a 所示瞬时，点 A 的速度为 $\mathbf{v}_A = 200\mathbf{j} \text{ mm/s}$ ，点 B 的切向加速度 $\mathbf{a}_B^t = 150\mathbf{i} \text{ mm/s}^2$ 。求角速度 ω 和角加速度 α ，并进一步写出点 C 的加速度和矢量表达式。

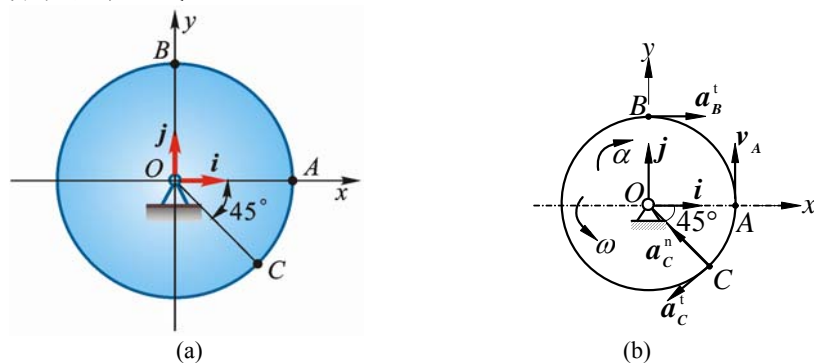


图 7-12

解 由图 7-12b 得出

$$\mathbf{v}_A = 0.2\mathbf{j} \text{ m/s}, \quad \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\mathbf{i}, \quad \boldsymbol{\omega} \times 0.1\mathbf{i} = 0.200\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}_B^t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}\mathbf{j}, \quad 0.150\mathbf{i} = \boldsymbol{\alpha} \times 0.1\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\alpha} = -1.5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_C^n + \mathbf{a}_C^t = R\omega^2(-\cos 45^\circ\mathbf{i} + \sin 45^\circ\mathbf{j}) + R\boldsymbol{\alpha}(-\sin 45^\circ\mathbf{i} - \cos 45^\circ\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_C = 0.1 \times 2^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 0.1 \times 1.5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -0.389\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}$$

7-14 圆盘以恒定的角速度 $\omega = 40 \text{ rad/s}$ 绕垂直于盘面的中心轴转动，该轴在 $y-z$ 面内，倾斜角 $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ 。点 A 的矢径在图 7-13 示瞬时为 $\mathbf{r} = 150\mathbf{i} + 160\mathbf{j} - 120\mathbf{k} \text{ mm}$ 。求点 A 的速度和加速度的矢量表达式，并用 $\mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{a}_n = R\omega^2$ 检验所得结果是否正确。

解 (1) $\cos \theta = \frac{4}{5}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}$

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega \sin \theta \mathbf{j} + \omega \cos \theta \mathbf{k}) \times (150\mathbf{i} + 160\mathbf{j} - 120\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \omega \sin \theta & \omega \cos \theta \\ 150 & 160 & -120 \end{vmatrix} \\ &= (-8000\mathbf{i} + 4800\mathbf{j} - 3600\mathbf{k}) \text{ mm/s} \\ &= -8\mathbf{i} + 4.8\mathbf{j} - 3.6\mathbf{k} \text{ m/s} \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (\boldsymbol{\alpha} = 0)$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \omega \sin \theta & \omega \cos \theta \\ -8 & 4.8 & -3.6 \end{vmatrix} \\ &= (3.6 \times 40 \times \frac{3}{5} - 4.8 \times 40 \times \frac{4}{5})\mathbf{i} + (-8 \times 40 \times \frac{4}{5})\mathbf{j} + (8 \times 40 \times \frac{3}{5})\mathbf{k} \\ &= -240\mathbf{i} - 256\mathbf{j} + 192\mathbf{k} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

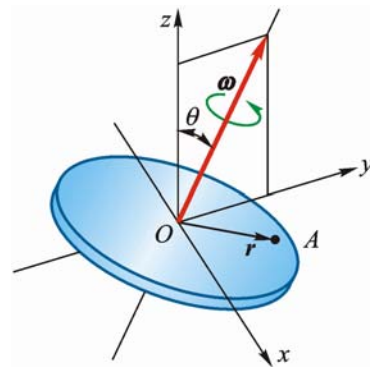


图 7-13

验证:

① $R = \sqrt{0.15^2 + 0.16^2 + 0.12^2} = 0.25$
 $\omega = 40$

$v = \sqrt{8^2 + 4.8^2 + 3.6^2} = 10$
 $v = R\omega$

② $a_n = a = \sqrt{240^2 + 256^2 + 192^2} = 400$
 $a_n = R\omega^2$

第 8 章 点的合成运动

8-1 如图 8-1 所示，光点 M 沿 y 轴作谐振动，其运动方程为

$$x = 0, \quad y = a \cos(kt + \beta)$$

如将点 M 投影到感光记录纸上，此纸以等速 v_e 向左运动。求点 M 在记录纸上的轨迹。

解 动系 $O'x'y'$ 固结在纸上，点 M 的相对运动方程

$$x' = v_e t, \quad y' = a \cos(kt + \beta)$$

消去 t 得点 M 在记录纸上的轨迹方程

$$y' = a \cos\left(\frac{k}{v_e} x' + \beta\right)$$

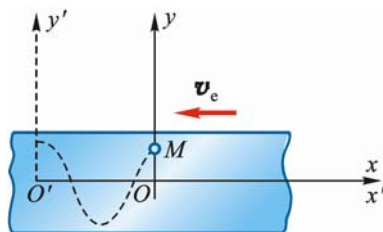


图 8-1

8-2 如图 8-2 所示，点 M 在平面 $Ox'y'$ 中运动，运动方程为

$$x' = 40(1 - \cos t), \quad y' = 40 \sin t$$

式中 t 以 s 计， x' 和 y' 以 mm 计。平面 $Ox'y'$ 又绕垂直于该平面的轴 O 转动，转动方程为 $\varphi = t$ rad，式中角 φ 为动系的 x' 轴与定系的 x 轴间的交角。求点 M 的相对轨迹和绝对轨迹。

解 由点 M 的相对运动方程可改写为

$$\left(\frac{x'}{40} - 1\right) = -\cos t$$

$$\frac{y'}{40} = \sin t$$

上 2 式两边平方后相加，得点 M 的相对轨迹方程

$$(x' - 40)^2 + y'^2 = 1600$$

由题得点 M 的坐标变换关系式

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

将 $\varphi = t$ 和相对运动方程代入，消去 t 得点 M 的绝对轨迹方程

$$(x + 40)^2 + y^2 = 1600$$

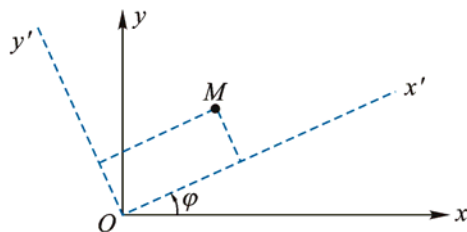


图 8-2

8-3 水流在水轮机工作轮入口处的绝对速度 $v_a = 15$ m/s，并与直径成 $\beta = 60^\circ$ 角，

如图 8-3a 所示，工作轮的半径 $R = 2$ m，转速 $n = 30$ r/min。为避免水流与工作轮叶片相冲击，叶片应恰当地安装，以使水流对工作轮的相对速度与叶片相切。求在工作轮外缘处水流对工作轮的相对速度的大小方向。

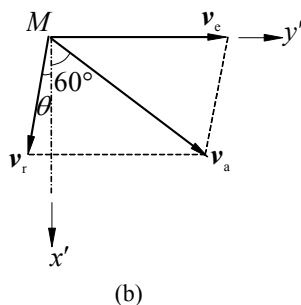
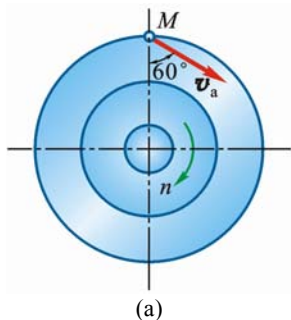


图 8-3

解 水轮机工作轮入口处的 1 滴水为动点 M ，动系固结于工作轮，定系固结于机架/地面（一般定系可不说明，默认为固结于机架，下同）；牵连运动为定轴转动，相对运动与叶片曲面相切，速度分析如图 8-3b 所示，设 θ 为 v_r 与 x' 轴的夹角。点 M 的牵连速度

$$v_e = R\omega = 2 \times \frac{n\pi}{30} = 6.283 \text{ m/s}$$

方向与 y' 轴平行。由图 8-3b,

$$\frac{v_e}{\sin(60^\circ + \theta)} = \frac{v_a}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{v_r}{\sin 30^\circ}$$

由前 1 等式得

$$v_e \cos \theta = v_a \sin(60^\circ + \theta)$$

$$\text{即} \quad \tan \theta = \frac{v_e - v_a \sin 60^\circ}{v_a \cos 60^\circ}$$

把 $v_e = 6.283 \text{ m/s}$ 及 $v_a = 15 \text{ m/s}$ 代入, 解得

$$\theta = 41^\circ 48'$$

由后 1 等式得

$$v_r = \frac{\sin 30^\circ}{\cos \theta} v_a = 10.1 \text{ m/s}$$

8-4 如图 8-4a 所示, 瓦特离心调速器以角速度 ω 绕铅直轴转动。由于机器负荷的变化, 调速器重球以角速度 ω_1 向外张开。如 $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_1 = 1.2 \text{ rad/s}$, 球柄长 $l = 500 \text{ mm}$, 悬挂球柄的支点到铅直轴的距离为 $e = 50 \text{ mm}$, 球柄与铅直轴间所成的交角 $\beta = 30^\circ$ 。求此时重球的绝对速度。

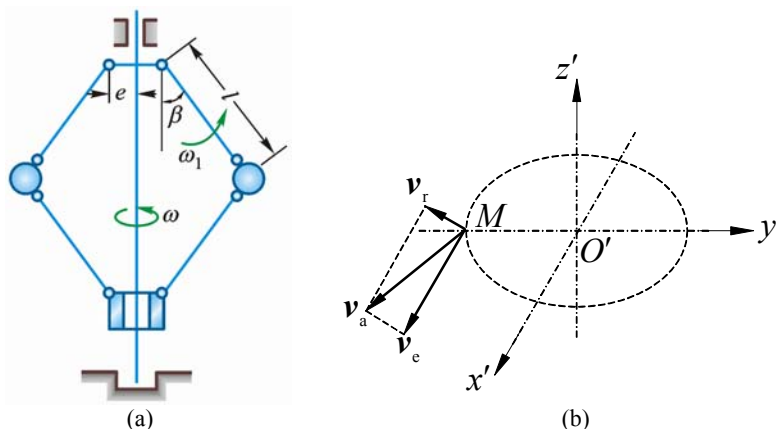


图 8-4

解 重球为动点, 动系固结于铅垂轴; 牵连运动为定轴转动, 相对运动为绕悬点之圆弧摆动, 且 $\mathbf{v}_r \perp \mathbf{v}_e$, 绝对运动为空间曲线, 如图 8-4b 所示。由于

$$v_e = (e + l \sin \beta) \omega = 3 \text{ m/s}, \quad v_r = l \omega_1 = 0.6 \text{ m/s}$$

所以

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 3.06 \text{ m/s}$$

\mathbf{v}_a 在 \mathbf{v}_e , \mathbf{v}_r 决定的平面内, 且

$$\tan \angle(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_e) = \frac{v_r}{v_e} = 0.2$$

8-5 杆 OA 长 l , 由推杆推动而在图面内绕点 O 转动, 如图 8-5a 所示。假定推杆的速度为 \mathbf{v} , 其弯头高为 a 。求杆端 A 的速度的大小 (表示为推杆至点 O 的速度 x 的函数)。

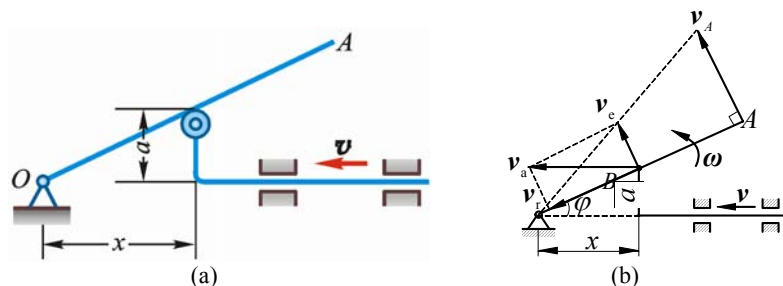


图 8-5

解 直角推杆上与杆 AO 接触点 B 为动点，动系固结于 AO ；牵连运动为定轴转动，绝对运动为水平直线运动，相对运动为沿杆 OA 直线运动。点 B 速度分析如图 8-5b，设 OA 角速度为 ω ，则

$$v_a = v, \quad v_e = \omega \cdot OB = v_a \sin \varphi, \quad \omega \cdot OB = v \sin \varphi$$

以 $\sin \varphi = \frac{a}{OB} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ 代入上式得

$$\omega = \frac{va}{x^2 + a^2}$$

最终得

$$v_a = \omega l = \frac{lav}{x^2 + a^2}$$

方向如图。

8-6 车床主轴的转速 $n = 30 \text{ r/min}$ ，工件的直径 $d = 40 \text{ mm}$ ，如图 8-6a 所示。如车刀横向走刀速度为 $v = 10 \text{ mm/s}$ ，求车刀对工件的相对速度。

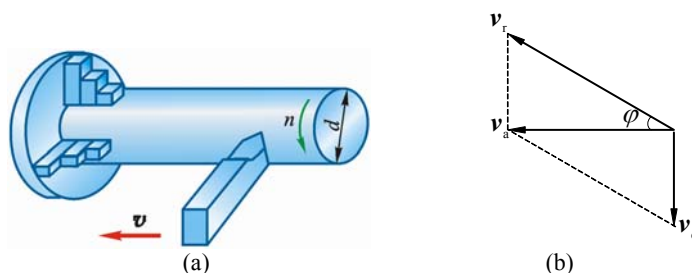


图 8-6

解 车刀头为动点，动系固结于工件；牵连运动为定轴转动，绝对运动为水平直线，相对运动为螺旋曲线。点 M 的牵连速度 v_e 垂直向下，绝对速度 $v_a = v$ ，相对速度 v_r 在 v_a 与 v_e 所决定的平面内，且设与 v_a 成 φ 角，如图 8-6b 所示。

$$v_a = v = 10 \text{ mm/s}, \quad v_e = \frac{d}{2} \cdot \frac{n\pi}{30} = 62.83 \text{ mm/s}$$

所以

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = \sqrt{10^2 + 62.83^2} = 63.6 \text{ mm/s}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_e}{v_a}\right) = \tan^{-1}(6.283) = 80^\circ 57'$$

8-7 在图 8-7a 和图 8-7b 所示的 2 种机构中，已知 $O_1O_2 = a = 200 \text{ mm}$ ， $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ 。求图示位置时杆 O_2A 的角速度。

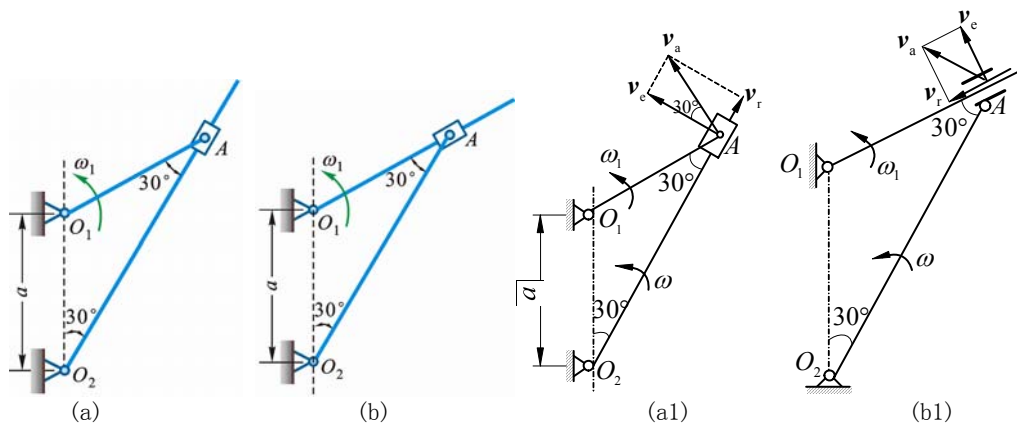


图 8-7

解 (a) 套筒 A 为动点，动系固结于杆 O_2A ；绝对运动为 O_1 绕的圆周运动，相对运动为沿 O_2A 直线，牵连运动为绕 O_2 定轴转动。速度分析如图 8-7a1 所示，由速度合成定理

$$v_a = v_e + v_r$$

因为 $\triangle O_1O_2A$ 为等腰三角形，故

$$O_1A = O_1O_2 = a, \quad O_2A = 2a \cos 30^\circ, \quad v_a = a\omega_1, \quad v_e = \omega \cdot O_2A = 2a\omega \cos 30^\circ$$

由图 8-7a1:

$$v_a = \frac{v_e}{\cos 30^\circ} = 2a\omega$$

得 $a\omega_1 = 2a\omega$

$$\omega = \frac{\omega_1}{2} = 1.5 \text{ rad/s (逆)}$$

(b) 套筒 A 为动点，动系固结于杆 O_1A ；绝对运动为绕 O_2 圆周运动，相对运动为沿杆直线运动，牵连运动为绕 O_1 定轴转动。速度分析如图 8-7b1 所示。

$$v_a = O_2A \cdot \omega_1 = 2a\omega \cos 30^\circ, \quad v_e = O_1A \omega = a\omega_1$$

由图 b1: $v_a = \frac{v_e}{\cos 30^\circ} = \frac{a\omega_1}{\cos 30^\circ}$

得 $2a\omega \cos 30^\circ = \frac{a\omega_1}{\cos 30^\circ}$

$$\omega = \frac{2}{3}\omega_1 = 2 \text{ rad/s (逆)}$$

8-8 图 8-8a 所示曲柄滑道机构中，曲柄长 $OA = r$ ，并以等角速度 ω 绕轴 O 转动。装在水平杆上的滑槽 DE 与水平线成 60° 角。求当曲柄与水平线的交角分别为 $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 时，杆 BC 的速度。

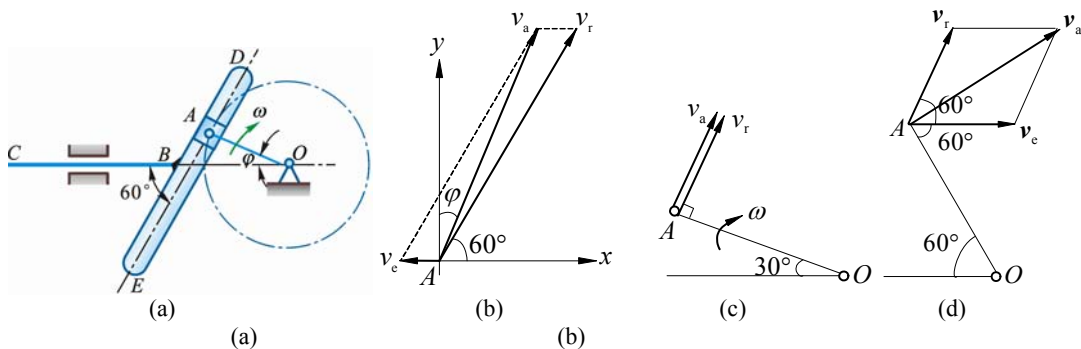


图 8-8

解 曲柄端点 A 为动点，动系固结于杆 BC ；绝对运动为绕 O 圆周运动，相对运动为沿滑道 DB 直线运动，牵连运动为水平直线平移。速度分析如图 8-8b 所示

$$\angle(\mathbf{v}_a, y) = \varphi, \quad v_a = r\omega$$

从图 b 得

$$\frac{v_e}{\sin(30^\circ - \varphi)} = \frac{v_a}{\sin 60^\circ}$$

所以

$$v_{BC} = v_e = \frac{\sin(30^\circ - \varphi)}{\sin 60^\circ} r\omega$$

$$\varphi = 0^\circ \text{ 时, } v_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} r\omega \quad (\leftarrow);$$

$$\varphi = 30^\circ \text{ 时, } v_{BC} = 0$$

$$\varphi = 60^\circ \text{ 时, } v_{BC} = -\frac{\sqrt{3}}{3} r\omega \quad (\rightarrow)$$

8-9 如图 8-9a 所示，摇杆机构的滑杆 AB 以等速 v 向上运动，初瞬时摇杆 OC 水平。摇杆长 $OC = a$ ，距离 $OD = l$ 。求当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时点 C 的速度的大小。

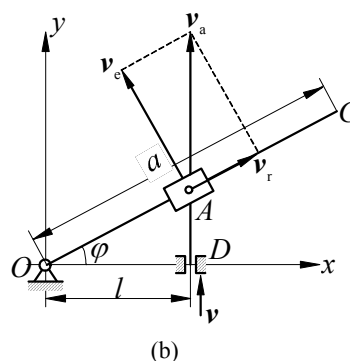
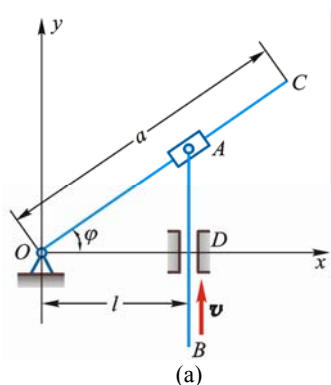


图 8-9

解 套筒 A 为动点，动系固结于杆 OC ；绝对运动为上下直线，相对运动沿 OC 直线，牵连运动为绕 O 定轴转动。速度分析如图 8-9b 所示，设杆 OC 角速度为 ω ，其转向逆时针。由题意及几何关系可得

$$v_a = v \quad (1)$$

$$v_e = \omega \cdot OA \quad (2)$$

$$v_a = \frac{v_e}{\cos \varphi} \quad (3)$$

$$OA = \sqrt{l^2 + v^2 t^2} \quad (4)$$

$$\cos \varphi = \frac{l}{OA} \quad (5)$$

式 (1), (2), (4), (5) 代入式 (3), 得

$$v = \frac{\omega \cdot OA}{\cos \varphi} = \frac{\omega OA^2}{l} = \frac{\omega(v^2 t^2 + l^2)}{l}$$

$$\omega = \frac{vla}{v^2 t^2 + l^2}$$

因

$$v_c = \omega \cdot a = \frac{v l a}{v^2 t^2 + l^2}$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, $v \cdot t = l$, 故

$$v_c = \frac{va}{2l}$$

8-10 平底顶杆凸轮机构如图 8-10a 所示, 顶杆 AB 可沿导轨上下移动, 偏心圆盘绕轴 O 转动, 轴 O 位于顶杆轴线上。工作时顶杆的平底始终接触凸轮表面。该凸轮半径为 R , 偏心距 $OC = e$, 凸轮绕轴 O 转动的角速度为 ω , OC 与水平线夹角 φ 。求当 $\varphi = 0^\circ$ 时, 顶杆的速度。

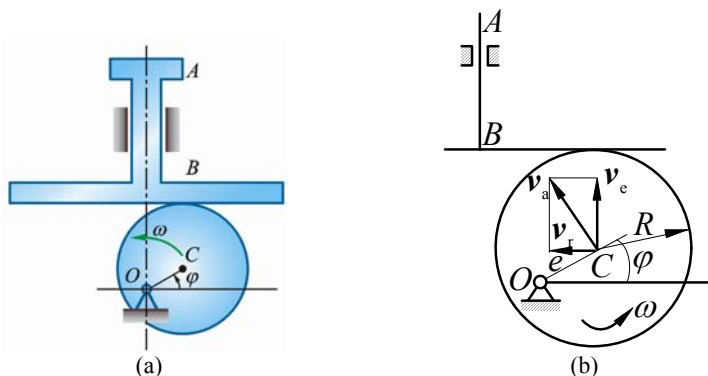


图 8-10

解 (1) 运动分析

轮心 C 为动点, 动系固结于 AB ; 牵连运动为上下直线平移, 相对运动为与平底平行直线, 绝对运动为绕 O 圆周运动。

(2) 速度分析, 如图 8-10b 所示

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_a & = & \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \\ \text{方向} & \perp OC & \uparrow \quad \leftarrow \\ \text{大小} & e\omega & ? \quad ? \end{array}$$

$$v_{AB} = v_e = v_a \cos \varphi = e\omega$$

8-11 绕轴 O 转动的圆盘及直杆 OA 上均有 1 导槽, 两导槽间有 1 活动销子 M 如图 8-11a 所示, $b = 0.1\text{m}$ 。设在图示位置时, 圆盘及直杆的角速度分别为 $\omega_1 = 9\text{ rad/s}$ 和 $\omega_2 = 3\text{ rad/s}$ 。求此瞬时销子 M 的速度。

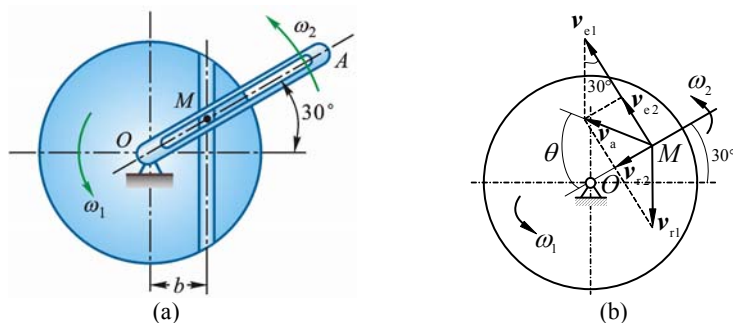


图 8-11

解 (1) 运动分析

① 活动销子 M 为动点, 动系固结于轮 O ; 牵连运动为绕 O 定轴转动, 相对运动为沿轮上导槽直线, 绝对运动为平面曲线。

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{e1} + \mathbf{v}_{r1} \quad (1)$$

② 活动销子 M 为动点, 动系固结于杆 OA ; 牵连运动为绕 O 定轴转动, 相对运动为沿 OA 直线, 绝对运动为平面曲线。

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{e2} + \mathbf{v}_{r2} \quad (2)$$

速度分析如图 8-11b 所示, 由式 (1)、(2) 得

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_{e1} & + & \mathbf{v}_{r1} & = & \mathbf{v}_{e2} & + & \mathbf{v}_{r2} \\ \text{方向} & \perp OM & \checkmark & & \perp OM & \checkmark & \\ \text{大小} & OM \cdot \omega_1 & ? & & OM \cdot \omega_2 & ? & \end{array} \quad (3)$$

式 (3) 向 \mathbf{v}_{e2} 方向投影, 得

$$\begin{aligned} v_{e1} - v_{r1} \cos 30^\circ &= v_{e2} \\ v_{r1} &= \frac{v_{e1} - v_{e2}}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{b}{\cos 30^\circ} \omega_1 - \frac{b}{\cos 30^\circ} \omega_2}{\cos 30^\circ} = \frac{4b}{3} (\omega_1 - \omega_2) \end{aligned}$$

式 (3) 向 \mathbf{v}_{r2} 方向投影, 得

$$\begin{aligned} v_{r2} &= \frac{1}{2} v_{r1} = \frac{2b}{3} (\omega_1 - \omega_2) = 0.4 \text{ m/s} \\ v_{e2} &= \frac{0.1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 3 = 0.346 \text{ m/s} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} v_a = \sqrt{v_{e2}^2 + v_{r2}^2} = 0.529 \text{ m/s} \\ \tan \theta = \frac{v_{e2}}{v_{r2}} = \frac{0.346}{0.4}, \theta = 40.9^\circ \end{cases}$$

8-12 图 8-12a 为叶片泵的示意图。当转子转动时, 叶片端点 B 将沿固定的定子曲线运动, 同时叶片 AB 将在转子上的槽 CD 内滑动。已知转子转动的角速度为 ω , 槽 CD 不通过轮心点 O , 此时 AB 和 OB 间的夹角为 β , OB 和定子曲线的法线间成 θ 角, $OB = \rho$ 。求叶片在转子槽内的滑动速度。

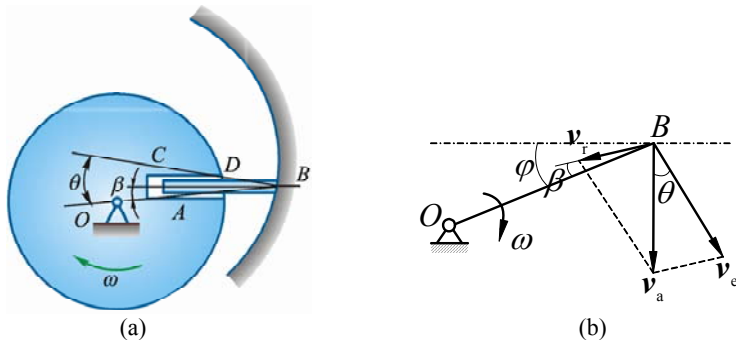


图 8-12

解 (1) 运动分析

叶片 AB 上的点 B 为动点, 动系固结于转子; 绝对运动为定子曲线, 相对运动为沿槽 CD 直线, 牵连运动为绕 O 定轴转动。

(2) 速度分析如图 8-12b 所示。设 AB 相对 CD 滑动速度为 \mathbf{v}_r , 转子作顺时针转动, 点 B 的牵连速度为:

$$v_e = \omega \cdot OB = \omega \rho$$

由图 8-12b 得

$$\begin{aligned} \frac{v_r}{\sin \theta} &= \frac{v_e}{\sin[90^\circ - (\theta - \beta)]} \\ v_r &= \frac{v_e \sin \theta}{\cos(\theta - \beta)} = \frac{\omega \rho \sin \theta}{\cos(\theta - \beta)} \end{aligned}$$

8-13 直线 AB 以大小为 v_1 的速度沿垂直于 AB 的方向向上移动；直线 CD 以大小为 v_2 的速度沿垂直于 CD 的方向向左上方移动，如图 8-13a 所示。如两直线间的交角为 θ ，求两直线交点 M 的速度。

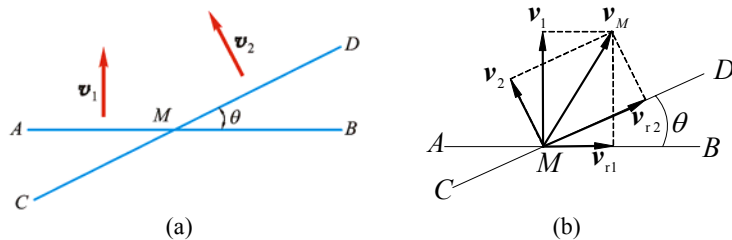


图 8-13

解 先将动系固结于杆 AB ，则动点 M 的牵连速度为 v_1 ，相对速度 v_{r1} 沿 AB ；再将动系固结于杆 CD ，则动点 M 的牵连速度为 v_2 ，相对速度 v_{r2} 沿 CD ，见图 8-13b，两种情况用速度合成定理矢量式分别为

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{r1} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{r2} \quad (2)$$

由式 (1), (2) 得

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{r2}$$

上式分别向水平轴 x 和铅垂轴 y 投影得

$$0 + v_{r1} = -v_2 \sin \theta + v_{r2} \cos \theta$$

$$v_1 + 0 = v_2 \cos \theta + v_{r2} \sin \theta$$

解得

$$v_{r1} = \frac{v_1 \cos \theta - v_2}{\sin \theta}$$

代入式 (1) 得

$$v_M = \sqrt{v_1^2 + v_{r1}^2} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta}$$

8-14 图 8-14a 所示两盘匀速转动的角速度分别为 $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ ， $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$ ，两盘半径均为 $R = 50 \text{ mm}$ ，两盘转轴距离 $l = 250 \text{ mm}$ 。图示瞬时，两盘位于同一平面内。求此时盘 2 上的点 A 相对于盘 1 的速度和加速度。

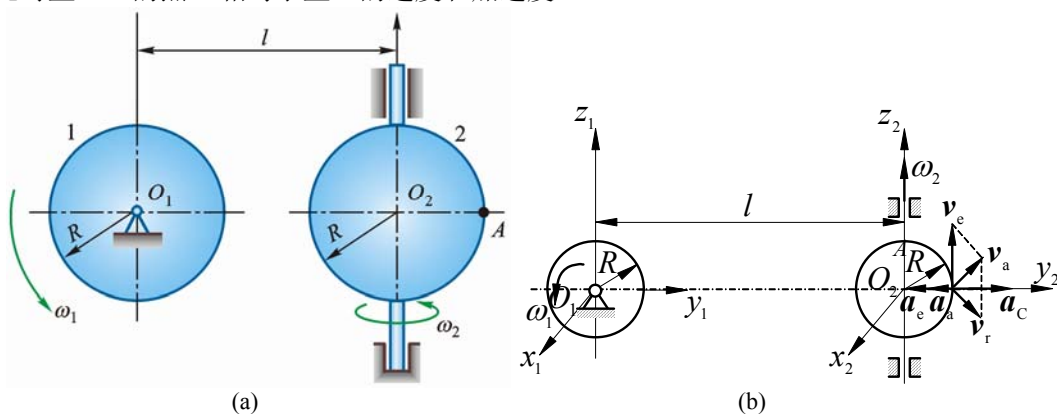


图 8-14

解 (1) 运动分析

轮 2 上点 A 为动点，动系固结于轮 1；绝对运动为水平面 $O_2 x_2 y_2$ 内，以 O_2 为圆心的圆周运动，相对运动为空间曲线，牵连运动为绕 O_1 定轴转动。

$$\omega_e = \omega_1 \mathbf{i}, \quad \omega_a = \omega_2 \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_e = (l + R) \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_a = R \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_e = \omega_e \times \mathbf{r}_e = (l + R) \omega_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_a = \omega_a \times \mathbf{r}_a = -R \omega_2 \mathbf{i}$$

(2) 速度分析, 如图 8-14b 所示

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_e = -R\omega_2 \mathbf{i} - (l+R)\omega_1 \mathbf{k} = -100\mathbf{i} - 300\mathbf{k} \text{ mm/s}$$

$$v_r = \sqrt{100^2 + 300^2} = 316 \text{ mm/s}$$

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_e = -(l+R)\omega_1^2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_a = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v}_a = -R\omega_2^2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_r = 2\omega_1 \mathbf{i} \times (-R\omega_2 \mathbf{i} - (l+R)\omega_1 \mathbf{k}) = 2(l+R)\omega_1^2 \mathbf{j}$$

(3) 加速度分析, 如图 8-14b 所示

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_a - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_C = -R\omega_2^2 \mathbf{j} + (l+R)\omega_1^2 \mathbf{j} - 2(l+R)\omega_1^2 \mathbf{j} \\ &= -(R\omega_2^2 + (l+R)\omega_1^2) \mathbf{j} = -(200 + 300) \mathbf{j} = -500 \mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

8-15 图 8-15a 所示公路上行驶的两车速度都恒为 72 km/h。图示瞬时, 在车 B 中的观察者看来, 车 A 的速度、加速度应多大?

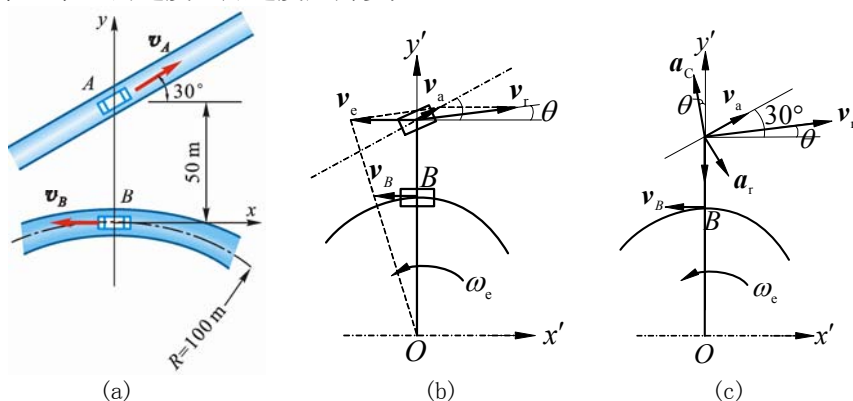


图 8-15

解 (1) 运动分析

车 A 为动点, 动系固结于车 B; 绝对运动为直线; 相对运动为平面曲线; 牵连运动为定轴转动。

(2) 速度分析, 如图 8-15b 所示

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

$$\text{方向} \quad \mathbf{v}_A \quad \perp OA \quad ?$$

$$\text{大小} \quad v_A \quad \frac{3}{2}v_B \quad ?$$

$$v_A = v_B = 20 \text{ m/s}$$

$$\omega_e = \frac{v_B}{R} = \frac{20 \text{ m/s}}{100 \text{ m}} = 0.2 \text{ rad/s}$$

$$v_e = \omega_e \times 150 \text{ m} = 30 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_e = 47.32\mathbf{i}' + 10\mathbf{j}' \text{ m/s}, \quad \tan \theta = \frac{10}{47.32}, \quad \theta = 11.93^\circ$$

(3) 加速度分析, 如图 8-15c 所示

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (2)$$

$$\text{方向} \quad \checkmark \quad \overrightarrow{AO} \quad ? \quad \perp \mathbf{v}_r$$

$$\text{大小} \quad 0 \quad AO \cdot \omega_e^2 \quad ? \quad 2\omega_e v_r$$

$$a_e = 150 \times \left(\frac{20}{100}\right)^2 = 6 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = 2\omega_e v_r = 2 \times \frac{1}{5} \times 48.365 = 19.346 \text{ m/s}^2$$

式(2)向 y' 投影, 得

$$a_{ry'} = a_e - a_c \cos \theta = 6 - 19.346 \cos 11.93^\circ = -12.9$$

式(2)向 x' 投影, 得

$$a_{rx'} = a_c \sin \theta = 4$$

所以

$$\mathbf{a}_r = 4\mathbf{i}' - 12.9\mathbf{j}' \text{ m/s}^2$$

8-16 图 8-16a 所示小环 M 沿杆 OA 运动, 杆 OA 绕轴 O 转动, 从而使小环在 Oxy 平面内具有如下运动方程:

$$x = 10\sqrt{3}t \text{ mm}, \quad y = 10\sqrt{3}t^2 \text{ mm}$$

求 $t = 1 \text{ s}$ 时, 小环 M 相对于杆 OA 的速度和加速度, 杆 OA 转动的角速度及角加速度。

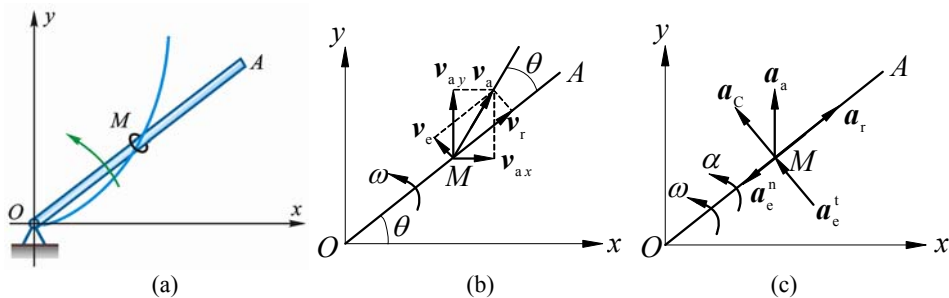


图 8-16

解 (1) $t = 1 \text{ s}$ 时,

$$\begin{cases} x = 10\sqrt{3} \text{ mm} \\ y = 10\sqrt{3} \text{ mm} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = 10\sqrt{3} \text{ mm/s} \\ \dot{y} = 20\sqrt{3} \text{ mm/s} \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 20\sqrt{3} \text{ mm/s}^2 \end{cases}$$

$$v_a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 10\sqrt{15} \text{ mm/s}$$

由图 8-16b

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{v_{ay}}{v_{ax}} = 2, \quad \theta = 18.43^\circ$$

$$(2) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

$$v_r = v_a \sin 18.43^\circ = 36.74 \text{ mm/s} \quad (\text{小环 } M \text{ 相对杆 } OA \text{ 的速度}) \quad (1)$$

$$v_e = v_a \cos 18.43^\circ = 12.24 \text{ mm/s}$$

$$\omega_{OA} = \frac{v_e}{OM} = \frac{12.24}{10\sqrt{6}} = 0.5 \text{ rad/s} \quad (\text{逆时针转向}) \quad (2)$$

$$(3) \quad \mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (3)$$

方向	✓	✓	✓	✓	✓
大小	✓	✓	?	?	✓

$$a_a = \ddot{y} = 20\sqrt{3} \text{ mm/s}^2$$

$$a_e^n = \overline{OM} \cdot \omega_{OA}^2 = 10\sqrt{6} \times 0.5^2 = 6.1237 \text{ mm/s}^2$$

$$a_c = 2\omega_{OA} v_r = 2 \times 0.5 \times 36.74 = 36.74 \text{ mm/s}^2$$

式(3)向 \mathbf{a}_r 方向投影, 得

$$a_a \cos 45^\circ = -a_e^n + a_r$$

$$a_r = \frac{\sqrt{2}}{2} a_a + a_e^n = 10\sqrt{6} + 6.1237 = 30.6 \text{ mm/s}^2$$

式 (3) 向 a_e^t 方向投影, 得

$$a_a \cos 45^\circ = a_e^t + a_c$$

$$a_e^t = \frac{\sqrt{2}}{2} a_a - a_c = 10\sqrt{6} - 36.74 = -12.245 \text{ mm/s}^2$$

$$\alpha_{OA} = \frac{a_e^t}{OM} = \frac{-12.245}{10\sqrt{6}} = -0.5 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{顺时针转向}) \quad (4)$$

8-17 图 8-17a 所示铰接四边形机构中, $O_1A = O_2B = 100 \text{ mm}$, 又 $O_1O_2 = AB$, 杆 O_1A 以等角速度 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 绕 O_1 轴转动。杆 AB 上有 1 套筒 C , 此筒与杆 CD 相铰接。机构的各部件都在同一铅直面内。求当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 杆 CD 的速度和加速度。

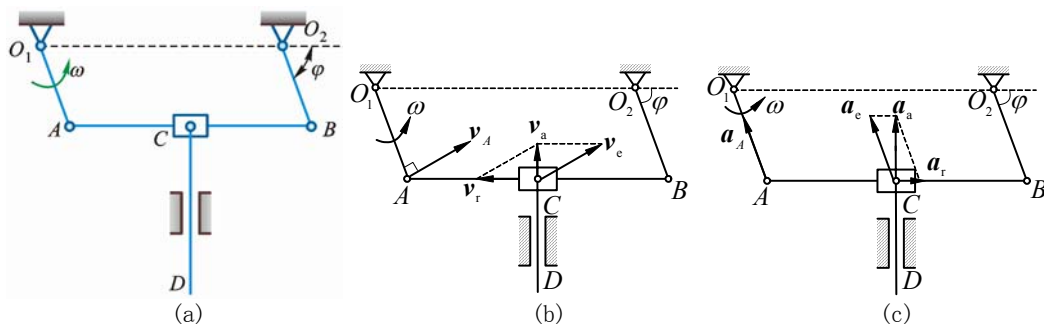


图 8-17

解 杆 CD 上点 C 为动点, 动系固结于杆 AB ; 牵连运动为曲线平移, 相对运动沿 BA 直线, 绝对运动为上下直线。速度与加速度分析分别如图 8-17b、图 8-17c 所示, 图中

$$v_A = v_B = v_e, \quad v_{CD} = v_a, \quad a_A = a_B = a_e, \quad a_{CD} = a_a$$

于是得

$$v_{CD} = v_a = v_e \cos \varphi = O_1A \cdot \omega \cos \varphi = 0.10 \text{ m/s}$$

$$a_{CD} = a_a = a_e \sin \varphi = O_1A \cdot \omega^2 \sin \varphi = 0.346 \text{ m/s}^2$$

方向如图。

8-18 剪切金属板的‘飞剪机’结构如图 8-18a。工作台 AB 的移动规律是 $s = 0.2 \sin \frac{\pi}{6} t \text{ m}$, 滑块 C 带动上刀片 E 沿导柱运动以切断工件 D , 下刀片 F 固定在工作台上。设曲柄 $OC = 0.6 \text{ m}$, $t = 1 \text{ s}$ 时, $\varphi = 60^\circ$ 。求该瞬时刀片 E 相对于工作台运动的速度和加速度, 并求曲柄 OC 转动的角速度及角加速度。

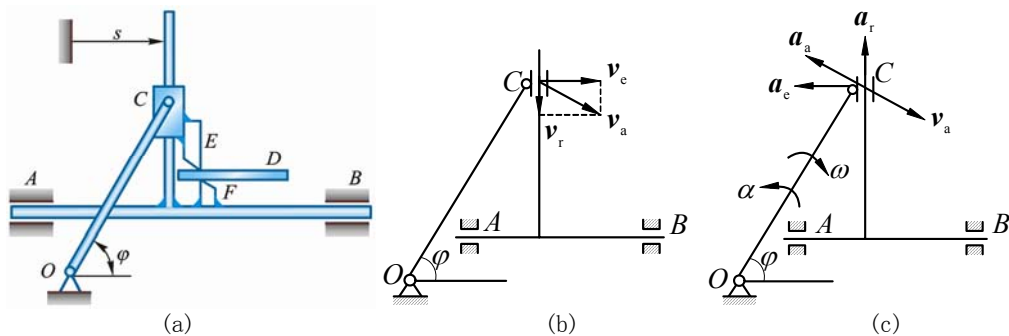


图 8-18

解 $s = 0.2 \sin \frac{\pi}{6} t$

(1) 运动分析

OC 上 C 为动点，动系固结于 AB ；绝对运动为以 O 为圆心的圆周运动；相对运动为上下直线；牵连运动为水平直线平移。

(2) 速度分析，如图 8-16b 所示

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_a & = & \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \\ \text{方向 } \perp OC & \rightarrow & \downarrow \\ \text{大小 } ? & \dot{s} & ? \end{array} \quad (1)$$

$$v_e = \dot{s} = 0.2 \times \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t = \frac{\sqrt{3}}{60} \pi \text{ m/s} \quad (t = 1 \text{ s})$$

$$v_r = v_e \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{60} \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.052 \text{ m/s} \quad (t = 1 \text{ s})$$

$$v_a = 2v_r = 0.105 \text{ m/s} \quad (t = 1 \text{ s})$$

$$\omega_{OC} = \frac{v_a}{OC} = \frac{0.105}{0.6} = 0.175 \text{ rad/s}$$

(3) 加速度分析，如图 8-16c 所示

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{a}_a^n + \mathbf{a}_a^t & = & \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r \\ \text{方向 } \checkmark & \checkmark & \checkmark \quad \checkmark \\ \text{大小 } \checkmark & ? & \checkmark \quad ? \end{array} \quad (2)$$

$$a_e = |\ddot{s}| = 0.2 \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 \sin \frac{\pi}{6} t = \frac{\pi^2}{360} \text{ m/s}^2 \quad (\leftarrow)$$

$$a_a^n = \frac{v_a^2}{OC} = 0.0184 \text{ m/s}^2$$

式 (2) 向 \mathbf{a}_e 投影，得

$$a_a^n \cos 60^\circ + a_a^t \sin 60^\circ = a_e$$

$$a_a^t = 0.021 \text{ m/s}^2, \quad \alpha_{OC} = \frac{0.021}{0.6} = 0.035 \text{ rad/s}^2 \quad (\uparrow)$$

式 (2) 向 \mathbf{a}_a^n 投影，得

$$a_a^n = a_e \cos 60^\circ - a_r \cos 30^\circ,$$

$$a_r = -0.00542 \text{ m/s}^2 \quad (\downarrow)$$

8-19 如图 8-19a 所示，曲柄 OA 长 0.4 m ，以等角速度 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ 绕 O 轴逆时针转向转动。由于曲柄的 A 端推动水平板 B ，而使滑杆 C 沿铅直方向上升。求当曲柄与水平线间的夹角 $\theta = 30^\circ$ 时，滑杆 C 的速度和加速度。

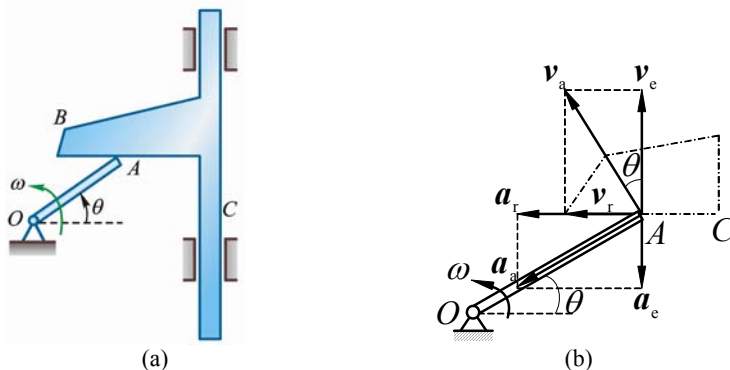


图 8-19

解 曲柄 OA 端点 A 为动点，动系固结于滑杆 BC ；牵连运动为上下直线平移，相对运动为水平直线，绝对运动为绕 O 圆周运动。点 A 的牵连速度与牵连加速度即为杆 BC 的速度与加速度。速度、加速度分析如图 8-19b 所示，得

$$v_C = v_e = OA \cdot \omega \cos \theta = 0.173 \text{ m/s} \quad (\uparrow)$$

$$a_C = a_e = OA \cdot \omega^2 \cos \theta = 0.05 \text{ m/s}^2 \quad (\downarrow)$$

方向如图。

8-20 图 8-20a 所示偏心轮摇杆机构中, 摇杆 O_1A 借助弹簧压在半径为 R 的偏心轮 C 上。偏心轮 C 绕轴 O 往复摆动, 从而带动摇杆绕轴 O_1 摆动。设 $OC \perp OO_1$ 时, 轮 C 的角速度为 ω , 角加速度为零, $\theta = 60^\circ$ 。求此时摇杆 O_1A 的角速度 ω_1 和角加速度 α_1 。

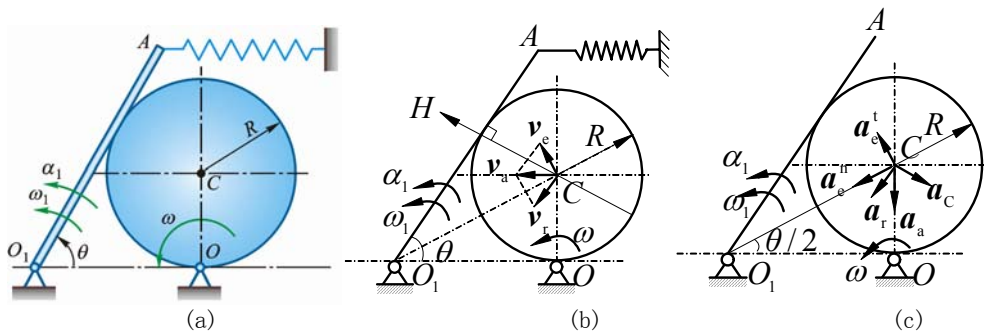


图 8-20

解 (1) 运动分析

轮心 C 为动点, 动系固结于杆 O_1A ; 绝对运动为绕点 O 圆周运动; 相对运动为与杆 O_1A 平行的直线运动; 牵连运动为绕 O_1 定轴转动。

(2) 速度分析, 图 8-20b

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

方向 $\perp CO$ $\perp O_1C$ $// O_1A$

大小 $R\omega$? ?

式(1)向 $\perp \mathbf{v}_r$ 方向投影, 得

$$v_a \cos 30^\circ = v_e \cos 30^\circ$$

$$v_e = v_a = R\omega$$

$$\omega_1 = \omega_e = v_e / O_1C = \frac{R\omega}{2R} = \frac{\omega}{2}$$

$$v_r = v_a = R\omega$$

(3) 加速度分析, 图 8-20c

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (2)$$

方向 沿 CO 沿 CO_1 沿 \mathbf{v}_e 沿 \mathbf{v}_r 沿 HC

大小 $R\omega^2$ $2R(\frac{\omega}{2})^2$? ? $2 \cdot \frac{\omega}{2} v_r$

式(2)向 \mathbf{a}_c 投影, 得

$$a_a \cos 60^\circ = -a_e^n \cos 60^\circ - a_e^t \cos 30^\circ + a_c$$

$$a_e^t \cos 30^\circ = -a_a \cdot \frac{1}{2} - a_e^n \cdot \frac{1}{2} + a_c$$

$$a_e^t = \frac{1}{\sqrt{3}}(-a_a - a_e^n + 2a_c) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-R\omega^2 - \frac{1}{2}R\omega^2 + 2R\omega^2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}R\omega^2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{2R} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}\omega^2$$

8-21 半径为 R 的半圆形凸轮 D 以等速 v_0 沿水平线向右运动, 带动从动杆 AB 沿铅

直方向上升，如图 8-21a 所示。求 $\varphi = 30^\circ$ 时杆 AB 相对于凸轮的速度和加速度。

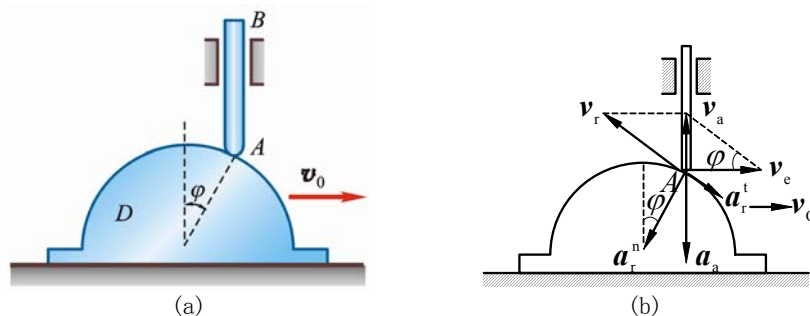


图 8-21

解 杆 AB 的顶点 A 为动点，动系固结于凸轮。绝对运动为上下直线，相对运动为沿凸轮圆弧曲线，牵连运动为水平直线平移。杆 AB 的运动与点 A 运动相同，速度、加速度分析如图 8-21b 所示。

(1) 速度

因 $v_e = v_0$ ，从速度分析中得

$$v_r = \frac{v_e}{\cos \varphi} = 1.155v_0$$

(2) 加速度

因 $v_0 = \text{常量}$ ，故

$$a_e = 0$$

而
$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{4v_0^2}{3R}$$

根据 $a_a = a_e + a_r$ 得

$$a_a = a_r = a_r^n + a_r^t$$

从加速度分析中得

$$a_r = a_a = \frac{a_r^n}{\cos \varphi} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \frac{v_0^2}{R}$$

8-22 如图 8-22a 所示，斜面 AB 与水平面间成 45° 角，以 0.1 m/s^2 的加速度沿轴 Ox 向右运动。物块 M 以匀相对加速度 $0.1\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ ，沿斜面滑下，沿斜面滑下，斜面与物块的初速都是零。物块的初位置为：坐标 $x = 0, y = h$ 。求物块的绝对运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

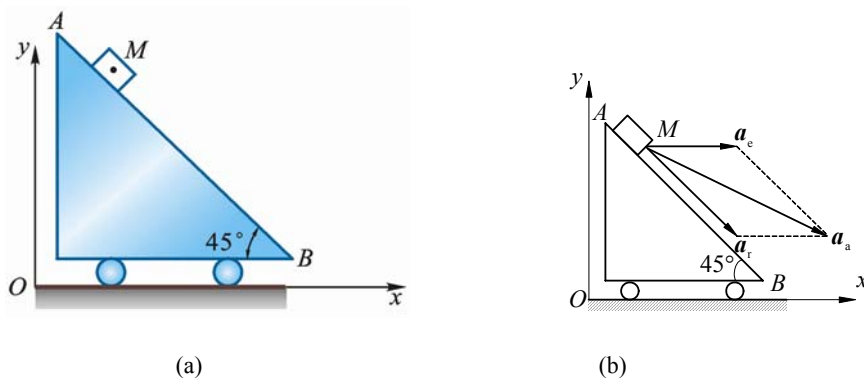


图 8-22

解 (1) 物块 M 为动点，动系固结于斜面，加速度分析如图 8-22b 所示

$$a_e = 0.10 \text{ m/s}^2, \quad a_r = 0.10\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 - 2a_e a_r \cos 135^\circ} = 0.10\sqrt{5} \text{ m/s}^2$$

(2) 速度

$$a_x = a_e + a_r \cos 45^\circ = 0.20 \text{ m/s}^2, \quad a_y = -a_r \sin 45^\circ = -0.10 \text{ m/s}^2$$

$$v_x = \int_0^t a_x dt = 0.20t \text{ m/s}, \quad v_y = \int_0^t a_y dt = -0.10t \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0.10\sqrt{5}t \text{ m/s}$$

(3) 运动方程及轨迹

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x dt, \quad x = 0.10t^2$$

$$\int_h^y dy = \int_0^t v_y dt, \quad y - h = -0.05t^2$$

得运动方程:

$$\begin{cases} x = 0.10t^2 \\ y = h - 0.05t^2 \end{cases}$$

消去 t 得轨迹方程:

$$x + 2y = 2h$$

8-23 小车沿水平方向向右作加速运动，其加速度 $a = 0.493 \text{ m/s}^2$ 。在小车上有 1 轮绕轴 O 转动，转动的规律为 $\varphi = t^2$ (t 以 s 计， φ 以 rad 计)。当 $t = 1 \text{ s}$ 时，轮缘上点 A 的位置如图 8-23a 所示。如轮的半径 $r = 0.2 \text{ m}$ ，求此时点 A 的绝对加速度。

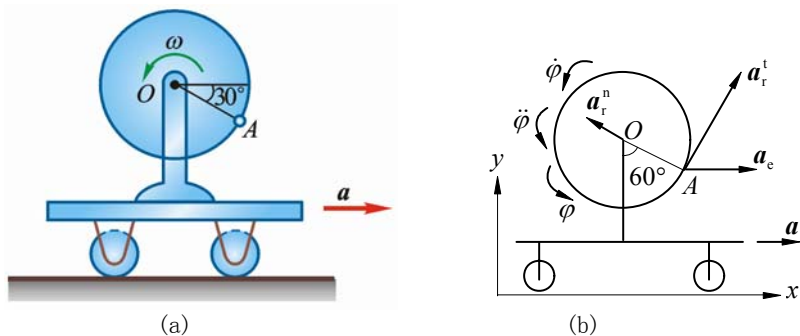


图 8-23

解 点 A 为动点，动系固结于小车；牵连运动为水平直线平移，相对运动为绕 O 圆周运动，绝对运动为平面曲线。加速度分析如图 8-23b 所示，图中 a_x, a_y 为点 A 的绝对加速度沿 x, y 轴的 2 个分量。由题意得 $t = 1 \text{ s}$ 时，各量为

$$\dot{\varphi} = 2 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\varphi} = 2 \text{ rad/s}^2, \quad a_e = a = 0.493 \text{ m/s}^2$$

$$a_r^n = r\dot{\varphi}^2 = 0.80 \text{ m/s}^2, \quad a_r^t = r\ddot{\varphi} = 0.40 \text{ m/s}^2,$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_e$$

分别向轴 x, y 方向投影得

$$a_x = a_e - a_r^n \cos 30^\circ + a_r^t \sin 30^\circ$$

$$a_y = a_r^n \sin 30^\circ + a_r^t \cos 30^\circ$$

代入有关数据解得

$$a_x = 1.8 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2, \quad a_y = 0.746 \text{ m/s}^2$$

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0.746 \text{ m/s}^2$$

8-24 如图 8-24a 所示，半径为 r 的圆环内充满液体，液体按箭头方向以相对速度 v 在

环内作匀速运动。如圆环以等角速度 ω 绕轴 O 转动，求在圆环内点 1 和 2 处液体的绝对加速度的大小。

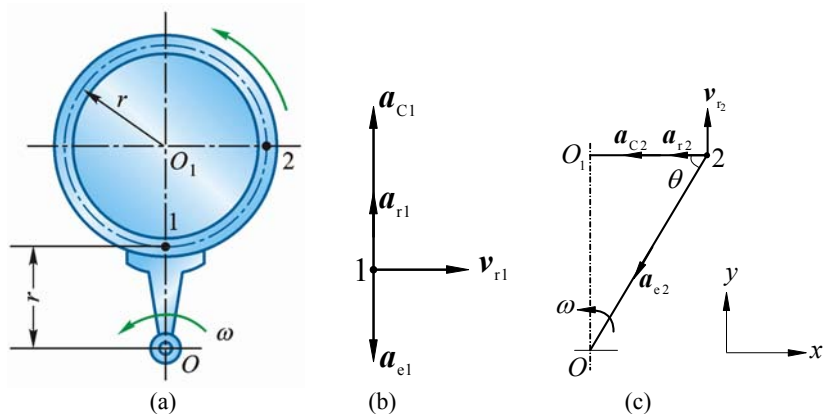


图 8-24

解 取点 1, 2 两处的 1 滴液体作动点，动系固结于圆环；绝对运动为平面曲线，相对运动为绕 O_1 圆周运动，牵连运动为绕 O 定轴转动。加速度分析如图 8-24b、图 8-24c 所示。由 $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$

对点 1:

$$a_1 = a_{r1} + a_{c1} - a_{e1} = \frac{v^2}{r} + 2\omega v - r\omega^2 \quad (\uparrow)$$

对点 2, 将加速度矢量式分别向水平和铅垂方向投影得

$$a_{2x} = -a_{e2} \cdot \cos \alpha - a_{r2} - a_{c2}, \quad a_{2y} = -a_{e2} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

故

$$a_{e2} = \sqrt{5}r\omega^2$$

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \sqrt{(r\omega^2 + 2\omega v + \frac{v^2}{r})^2 + 4r^2\omega^4}$$

8-25 图 8-25a 所示圆盘绕 AB 轴转动，其角速度 $\omega = 2t \text{ rad/s}$ 。点 M 沿圆盘直径离开中心向外缘运动，其运动规律为 $OM = 40t^2 \text{ mm}$ 。半径 OM 与 AB 轴间成 60° 倾角。求当 $t = 1 \text{ s}$ 时点 M 的绝对加速度的大小。

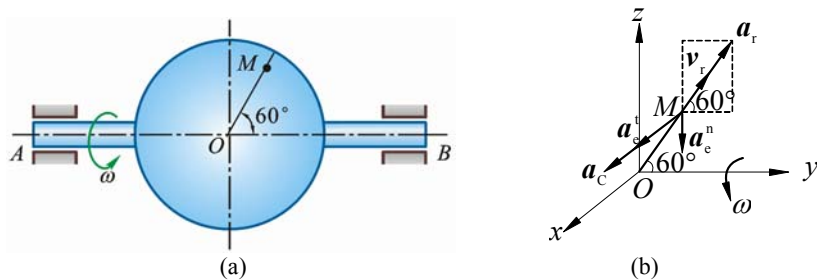


图 8-25

解 点 M 为动点，动系 $Oxyz$ 固结于圆盘；牵连运动为定轴转动，相对运动为沿径向直线运动，绝对运动为空间曲线。其中轴 x 垂直圆盘指向外，加速度分析如图 8-25b 所示，其中 \mathbf{a}_e^t , \mathbf{a}_c 垂直于盘面。当 $t = 1 \text{ s}$ 时

$$\omega = 2t = 2 \text{ rad/s}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ rad/s}^2, \quad OM = 40t^2 = 40 \text{ mm}$$

$$v_r = \frac{d}{dt} OM = 80t = 80 \text{ mm/s},$$

$$a_e^n = OM \sin 60^\circ \cdot \omega^2 = 80\sqrt{3} \text{ mm/s}^2, \quad a_e^t = OM \sin 60^\circ \cdot \alpha = 40\sqrt{3} \text{ mm/s}^2$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 80 \text{ mm/s}^2$$

$$a_c = 2 \cdot \omega \cdot v_r \cdot \sin 60^\circ = 160\sqrt{3} \text{ mm/s}^2$$

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(a_r \cos 60^\circ)^2 + (a_r \sin 60^\circ - a_e^n)^2 + (a_e^t + a_c)^2}$$

代入数据得

$$a_M = 0.356 \text{ m/s}^2$$

8-26 图 8-26a 所示直角曲杆 OBC 绕轴 O 转动，使套在其上的小环 M 沿固定直杆 OA 滑动。已知： $OB = 0.1 \text{ m}$ ， OB 与 BC 垂直，曲杆的角速度 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ ，角加速度为零。求当 $\varphi = 60^\circ$ 时，小环 M 的速度和加速度。

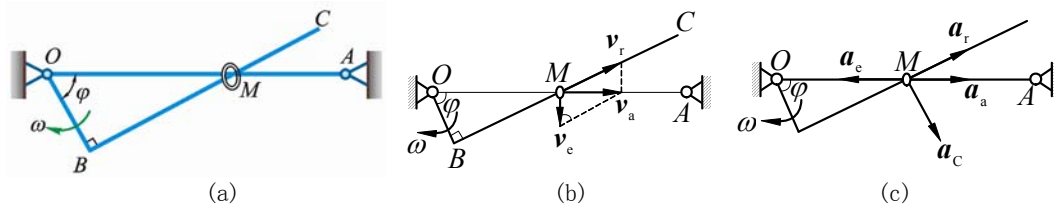


图 8-26

解 小环 M 为动点，动系固结于曲杆 OBC ；绝对运动为沿 AO 直线，相对运动沿直线 BC ，牵连运动为绕 O 定轴转动。速度分析如图 8-26b 所示，据

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

此时

$$v_e = OM \cdot \omega = \frac{OB \cdot \omega}{\cos \varphi} = 0.1 \text{ m/s}$$

$$v_M = v_e \tan \varphi = 0.10\sqrt{3} = 0.1732 \text{ m/s} \quad (\rightarrow)$$

$$v_r = \frac{v_e}{\cos \varphi} = 2v_e = 0.20 \text{ m/s}$$

加速度分析如图 8-26c 所示

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

其中

$$a_e = OM \cdot \omega^2 = 0.05 \text{ m/s}^2, \quad a_c = 2\omega v_r = 0.20 \text{ m/s}^2$$

将加速度矢量式向 \mathbf{a}_c 方向投影得

$$a_M \cos \varphi = -a_e \cos \varphi + a_c$$

代入已知数据解得

$$a_M = \frac{-a_e \cos \varphi + a_c}{\cos \varphi} = 0.35 \text{ m/s}^2$$

8-27 牛头刨床机构如图 8-27a 所示。已知 $O_1A = 200 \text{ mm}$ ，角速度 $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ 。求图示位置滑枕 CD 的速度和加速度。

解 (1) 先取 O_1A 上点 A 为动点，动系固结于 O_2B ；绝对运动为绕 O_1 圆周运动，相对运动为沿直线 O_2B ，牵连运动为绕 O_2 定轴转动。速度、加速度分析如图 8-27b，图 8-27c 所示。设 O_2B 的角速度为 ω ，角加速度为 α 。由图知

$$O_1A = 0.4 \text{ m}, \quad v_A = \omega_1 \cdot O_1A = 0.4 \text{ m/s}$$

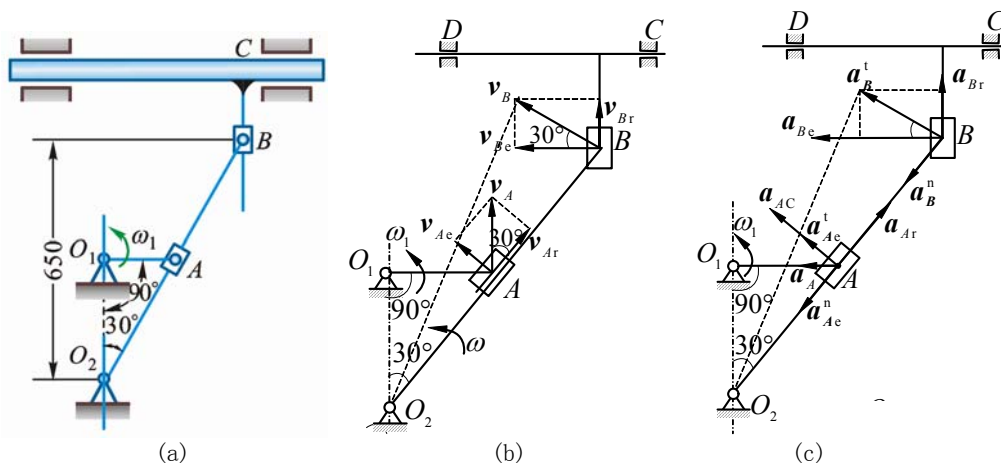


图 8-27

由速度分析图 8-27b,

$$v_{Ar} = v_A \cos 30^\circ = 0.20\sqrt{3} \text{ m/s}, \quad v_{Ae} = v_A \sin 30^\circ = 0.20 \text{ m/s}$$

又 $v_{Ae} = \omega \cdot O_2A$

所以

$$\omega = \frac{v_{Ae}}{O_2A} = 0.5 \text{ rad/s (逆)}$$

由加速度分析图 8-27c, 将

$$a_A = a_{Ae}^n + a_{Ae}^t + a_{Ar} + a_{AC}$$

分别向轴 x, y 投影得

$$-a_A = -a_{Ae}^n \cos 60^\circ - a_{Ae}^t \cos 30^\circ + a_{Ar} \cos 60^\circ - a_{AC} \cos 30^\circ \quad (1)$$

$$0 = -a_{Ae}^n \sin 60^\circ + a_{Ae}^t \sin 30^\circ + a_{Ar} \sin 60^\circ + a_{AC} \sin 30^\circ \quad (2)$$

把 $a_A = \omega_1^2 \cdot O_1A = 0.8 \text{ m/s}^2$, $a_{Ae}^n = \omega^2 \cdot O_2A = 0.10 \text{ m/s}^2$,

$$a_{Ae}^t = \alpha \cdot O_2A = 0.40\alpha \text{ m/s}^2, \quad a_{AC} = 2\omega v_{Ar} = 0.20\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

代入式 (1), (2), 消去 a_{Ar} , 解得

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}^2 \text{ (逆)}$$

(2) 再取摇杆 O_2B 上的点 B 为动点, 动系固结于滑枕 CD ; 绝对运动为绕 O_2 圆周运动, 相对运动为上下直线运动, 牵连运动为水平直线平移。速度、加速度分析如图 8-27b、图 8-27c 所示。因

$$v_B = O_2B \cdot \omega = \frac{0.65}{\cos 30^\circ} \times 0.5 = \frac{0.65}{3} \sqrt{3} \text{ m/s}$$

故

$$v_{CD} = v_{Be} = v_B \cos 30^\circ = 0.325 \text{ m/s (←)}$$

将 $a_B^t + a_B^n = a_{Be} + a_{Br}$

向轴 x 投影得

$$-a_B^t \cos 30^\circ - a_B^n \cos 60^\circ = -a_{Be} \quad (3)$$

把

$$-a_B^t = O_2B \cdot \alpha = 0.65 \text{ m/s}^2, \quad -a_B^n = O_2B \cdot \omega^2 = 0.1876 \text{ m/s}^2$$

代入式 (3), 解得

$$a_{CD} = a_{Be} = 0.657 \text{ m/s}^2 \text{ (←)}$$

8-28 如图 8-28a 所示, 点 M 以不变的相对速度 v_r 沿圆锥体的母线向下运动。此圆锥体以角速度 ω 绕轴 OA 作匀速转动。如 $\angle MOA = \theta$, 且当 $t = 0$ 时点在 M_0 处, 此时距离 $OM_0 = b$ 。求在 t 秒时, 点 M 的绝对加速度的大小。

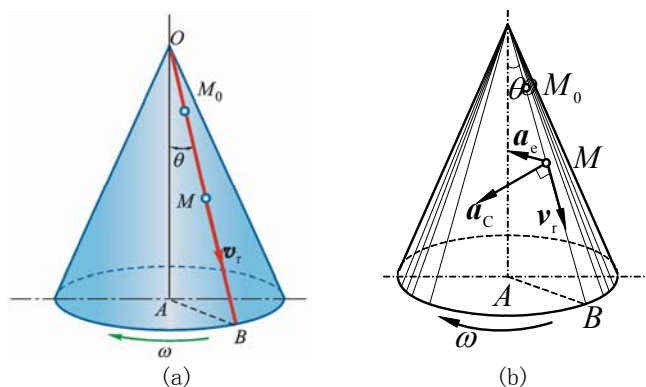


图 8-28

解 点 M 为动点, 动系固结于圆锥体; 牵连运动为定轴转动, 相对运动沿 OB 直线, 绝对运动为圆锥螺旋线。加速度分析如图 8-28b 所示。据

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

其中 $a_r = 0$, $a_e = OM \sin \theta \cdot \omega^2 = (b + v_r t) \omega^2 \sin \theta$, $a_c = 2\omega v_r \sin \theta$

因 $\mathbf{a}_e \perp \mathbf{a}_c$

故

$$a_M = \sqrt{a_e^2 + a_c^2} = \sqrt{(b + v_r t)^2 \omega^4 + 4\omega^2 v_r^2} \cdot \sin \theta$$

第9章 刚体的平面运动

9-1 椭圆规尺 AB 由曲柄 OC 带动，曲柄以角速度 ω_0 绕轴 O 匀速转动，如图 9-1 所示。如 $OC=BC=AC=r$ ，并取 C 为基点，求椭圆规尺 AB 的平面运动方程。

解 取 C 为基点。将规尺的平面运动分解为随基点的平移和绕基点的转动。因为

$$OC = BC = AC = r$$

所以

$$\angle COB = \angle CBO$$

设此角为 φ ，则

$$\varphi = \omega_0 t$$

故规尺 AB 的平面运动方程为

$$x_C = r \cos \omega_0 t, \quad y_C = r \sin \omega_0 t, \quad \varphi = \omega_0 t$$

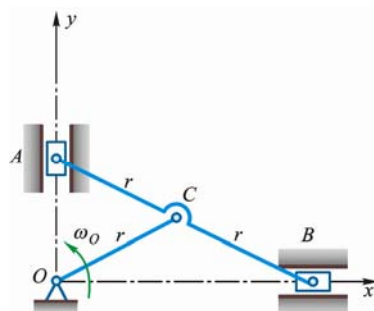


图 9-1

9-2 如图 9-2 所示，圆柱 A 缠以细绳，绳的 B 端固定在天花板上。圆柱自静止落下，其轴心的速度为 $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$ ，其中 g 为常量， h 为圆柱轴心到初始位置的距离。如圆柱半径为 r ，求圆柱的平面运动方程。

解 以点 A 为基点，将圆柱的平面运动分解为随基点 A 的平移和绕基点 A 的转动。先求基点 A 的方程。图示坐标系中，

$$x_A = 0, y_A = h$$

$$\frac{dh}{dt} = v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

改写为

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{g}dt$$

上式积分

$$\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2\sqrt{3g}}{3} \int_0^t dt$$

得

$$y_A = h = \frac{1}{3}gt^2$$

依题意，有

$$\varphi_A = \frac{h}{r} = \frac{1}{3r}gt^2$$

故圆柱的平面运动方程为

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = \frac{1}{3}gt^2 \\ \varphi_A = \frac{1}{3r}gt^2 \end{cases}$$

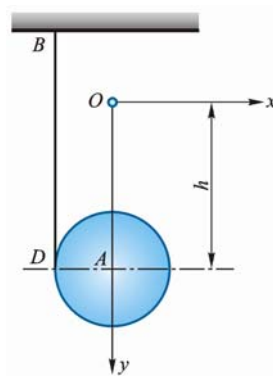


图 9-2

9-3 半径为 r 的齿轮由曲柄 OA 带动，沿半径为 R 的固定齿轮滚动，如图 9-3a 所示。如曲柄 OA 以等角加速度 α 绕轴 O 转动，当运动开始时，角速度 $\omega_0 = 0$ ，转角 $\varphi_0 = 0$ 。求动齿轮以中心 A 为基点的平面运动方程。

解 动齿轮的平面运动可分解为以 A 为基点的平移和绕点 A 的转动。在图 9-3 所示坐标系中，

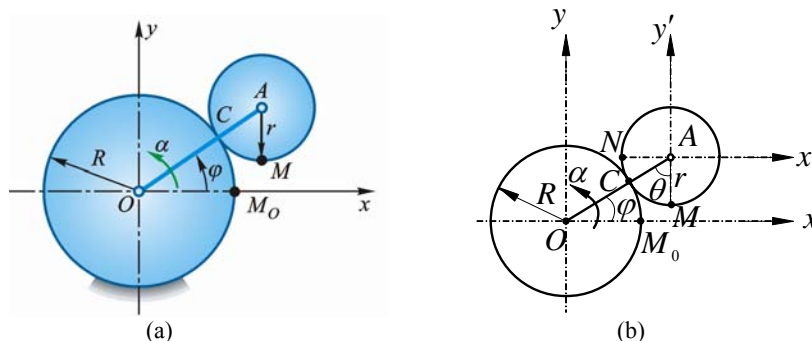


图 9-3

点 A 的坐标为

$$x_A = (R + r) \cos \varphi \quad (1)$$

$$y_A = (R + r) \sin \varphi \quad (2)$$

因 α 是常数，且当 $t = 0$ 时， $\omega_0 = \varphi_0 = 0$

故

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2$$

设小轮上开始时啮合点为 M ，则 AM 起始位置为水平。设任一时刻 AM 绕 A 的转角为 φ_A ，由图可见，

$$\varphi_A = \angle NAM, \text{ 且 } \varphi_A = \varphi + \theta$$

因动齿轮作纯滚动，故有弧 $CM_0 = CM$ ，即

$$R\varphi = r\theta, \quad \theta = \frac{R}{r}\varphi$$

得

$$\varphi_A = \frac{R+r}{r}\varphi \quad (3)$$

以 $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2$ 代入式 (1)、(2)、(3)，得动齿轮的平面运动方程为

$$x_A = (R + r) \cos \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$y_A = (R + r) \sin \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$\varphi_A = \frac{1}{2} \frac{(R+r)}{r} \alpha t^2$$

9-4 杆 AB 的 A 端沿水平线以等速 v 运动，运动时杆恒与半圆周相切于点 C ，半圆周的半径为 R ，如图 9-4a 所示，如杆与水平线间的交角为 θ ，试以角 θ 表示杆的角速度。

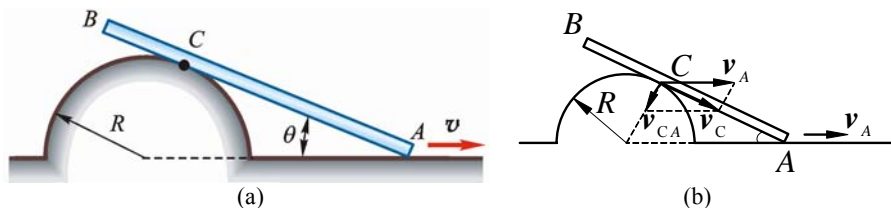


图 9-4

解 以 A 为基点，研究杆 AB 上与半圆周的切点 C 的运动，点 C 速度分析如图 9-4b。图中

$$v_A = v, \quad v_{CA} = v_A \sin \theta = v \sin \theta \quad (1)$$

$$v_{CA} = AC \cdot \omega = \frac{R}{\tan \theta} \cdot \omega \quad (2)$$

解式 (1) \ (2) 得

$$\omega = \frac{v \sin^2 \theta}{R \cos \theta} \quad (\text{逆})$$

9-5 如图 9-5a 所示, 在筛动机构中, 筛子的摆动是由曲柄杆机构所带动。已知曲柄 OA 的转速 $n_{OA} = 40 \text{ r/min}$, $OA = 0.3 \text{ m}$ 。当筛子 BC 运动到与点 O 在同一水平线上时, $\angle BAO = 90^\circ$ 。求此瞬时筛子 BC 的速度。

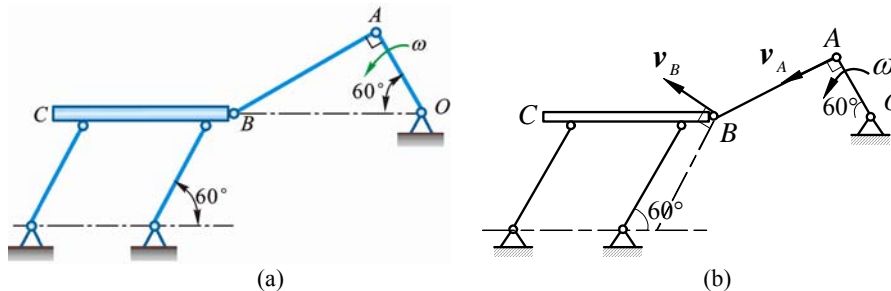


图 9-5

解 筛子 BC 作平移, 如图 9-5b 所示的位置, v_B 与 CBO 夹角为 30° , 与 AB 夹角为 60° 。且

$$v_A = \omega \cdot OA = \frac{\pi \times 40}{30} \times 0.30 = 0.40\pi \text{ m/s}$$

由速度投影定理 $(v_A)_{AB} = (v_B)_{AB}$ 得 (图 9-5b)

$$v_A = v_B \cos 60^\circ$$

$$v_{BC} = v_B = \frac{v_A}{\cos 60^\circ} = 0.8\pi = 2.51 \text{ m/s}$$

9-6 四连杆机构中, 连杆 AB 上固结 1 块三角板 ABD , 如图 9-6a 所示。机构由曲柄 O_1A 带动。已知曲柄的角速度 $\omega_{O_1A} = 2 \text{ rad/s}$; 曲柄 $O_1A = 0.1 \text{ m}$, 水平距离 $O_1O_2 = 0.05 \text{ m}$, $AD = 0.05 \text{ m}$; 当 O_1A 铅直时, AB 平行于 O_1O_2 , 且 AD 与 AO_1 在同 1 直线上; 角 $\varphi = 30^\circ$ 。求三角板 ABD 的角速度和点 D 的速度。

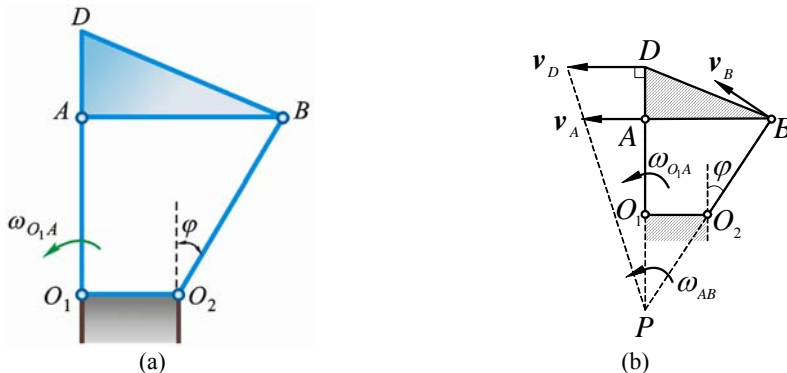


图 9-6

解 三角板 ABD 作平面运动, 在图 9-6 所示位置的速度瞬心在点 P , 设三角板角速度为 ω_{AB} , 由题意得

$$v_A = O_1A \cdot \omega_{O_1A} = PA \cdot \omega_{AB}$$

由几何关系

$$PA = O_1A + PO_1 = O_1A + O_1O_2 \cot 30^\circ = 0.10 + 0.05\sqrt{3} \text{ m}$$

把 PA 值代入上式, 得

$$\omega_{AB} = \frac{O_1 A}{PA} \cdot \omega_{O_1 A} = \frac{0.10 \times 2}{0.10 + 0.05\sqrt{3}} = 1.07 \text{ rad/s (逆)}$$

于是有

$$v_D = PD \cdot \omega_{AB} = (AD + PA)\omega_{AB} = (0.05 + 0.10 + 0.05\sqrt{3}) \times 1.07 = 0.253 \text{ m/s (←)}$$

9-7 图 9-7a 所示双曲柄连杆机构的滑块 B 和 E 用杆 BE 连接。主动曲柄 OA 和从动曲柄 OD 都绕 O 轴转动。主动曲柄 OA 以等角速度 $\omega_0 = 12 \text{ rad/s}$ 转动。已知机构的尺寸为： $OA=0.1\text{m}$, $OD=0.12\text{m}$, $AB=0.26\text{m}$, $BE=0.12\text{m}$, $DE = 0.12\sqrt{3}\text{m}$ 。求当曲柄 OA 垂直于滑块的导轨方向时, 从动曲柄 OD 和连杆 DE 的角速度。

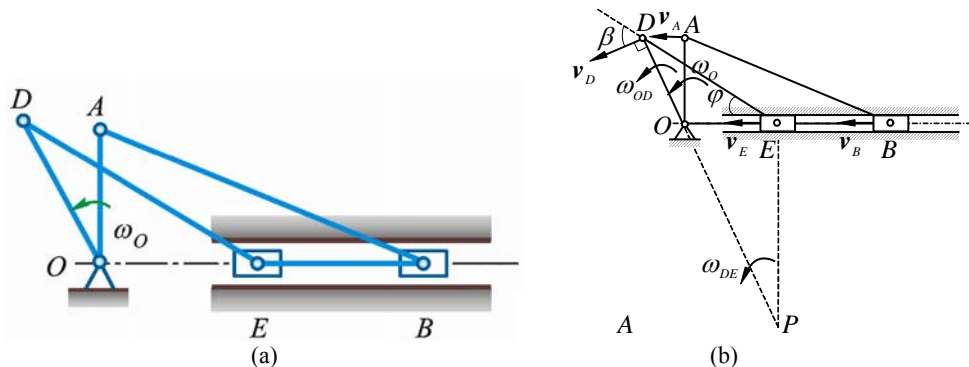


图 9-7

解 当 OA 垂直 EB 时, $v_A \parallel v_B$, 杆 AB 作瞬时平移, 故

$$v_A = v_B$$

杆 BE 作水平直线平移, 所以

$$v_E = v_B$$

故

$$v_A = v_B = v_E = OA \cdot \omega_0 = 1.20 \text{ m/s}$$

由于 $v_D \perp OD$, 平面运动杆 DE 的速度瞬心应在 v_D , v_E 的垂线的交点 P 。由几何关系

$$OE = OB - EB = \sqrt{AB^2 - OA^2} - EB = 0.12 \text{ m}$$

$$OE = OD = 0.12 \text{ m}, \quad \angle DEO = \angle ODE = \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{DE/2}{OE} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^\circ$$

由速度投影定理得

$$v_D \cos \beta = v_E \cos \varphi$$

而

$$\beta = 90^\circ - \varphi, \quad \cos \beta = \sin \varphi$$

$$v_D = \frac{v_E}{\tan \varphi} = 1.20\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\omega_{OD} = \frac{v_D}{OD} = 10\sqrt{3} = 17.32 \text{ rad/s (逆)}$$

由几何关系知

$$PE = OE \cdot \tan \angle EOP = OE \tan 2\varphi = 0.12\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_E}{PE} = \frac{10}{3}\sqrt{3} = 5.77 \text{ rad/s (逆)}$$

9-8 图 9-8a 所示机构中, 已知: $OA = BD = DE = 0.1 \text{ m}$, $EP = 0.1\sqrt{3} \text{ m}$;

$\omega_{OA} = 4 \text{ rad/s}$ 。在图 9-8a 所示位置时，曲柄 OA 与水平线 OB 垂直；且 B, D 和 F 在同 1 铅直线上，又 DE 垂直于 EF 。求杆 EF 的角速度和点 F 的速度。

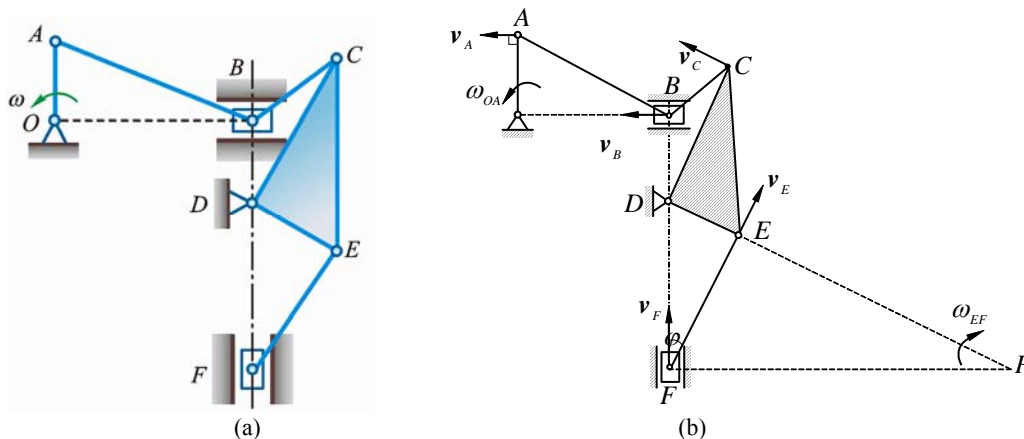


图 9-8

解 机构中，杆 AB, BC 和 EF 作平面运动，曲柄 OA 和三角块 CDE 作定轴转动，而滑块 B, F 作平移。此时杆 AB 上 v_A, v_B 均沿水平方向如图 9-8b 所示，所以杆 AB 作瞬时平移。

$$v_B = v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 0.40 \text{ m/s}$$

$v_C \perp DC, v_B \perp DB$ ，杆 BC 的速度瞬心在点 D ，故

$$v_C = \frac{DC}{DB} \cdot v_B$$

$$v_E = DE \cdot \frac{v_C}{DC} = \frac{DE}{DB} \cdot v_B = 0.40 \text{ m/s} \quad (\text{方向沿杆 } EF \text{ 如图 9-8b})$$

由速度投影定理得

$$v_F \cdot \cos \varphi = v_E$$

由几何关系知，在 $\triangle DEF$ 中，

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}$$

$$v_F = \frac{v_E}{\cos \varphi} = 0.462 \text{ m/s} \quad (\uparrow)$$

杆 EF 的速度瞬心在点 P ：

$$\omega_{EF} = \frac{v_F}{PF} = \frac{v_F}{EF / \sin \varphi} = \frac{v_F \sin \varphi}{EF} = 1.33 \text{ rad/s} \quad (\text{顺})$$

9-9 图 9-9a 所示配汽机构中，曲柄 OA 的角速度 $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 为常量。已知 $OA = 0.4 \text{ m}$ ， $AC = BC = 0.2\sqrt{37} \text{ m}$ 。求当曲柄 OA 在两铅直线位置和两水平位置时，配汽机构中气阀推杆 DE 的速度。

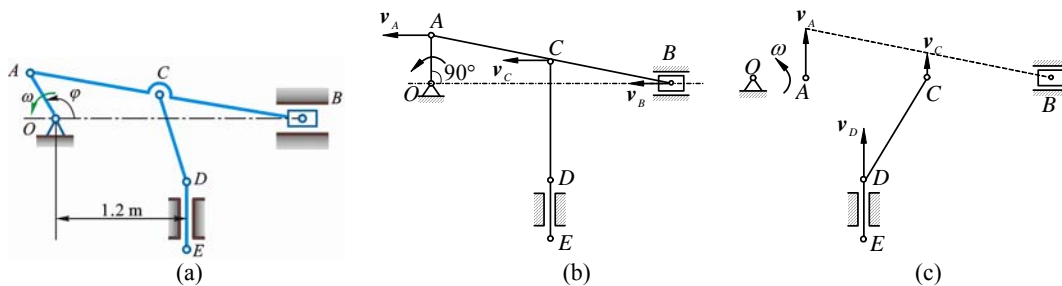


图 9-9

解 图 9-9 所示杆 AB, CD 作平面运动。

(1) 当 $\varphi = 90^\circ$ 、 270° 时, 曲柄 OA 处于铅垂位置, 图 9-9b 表示 $\varphi = 90^\circ$ 时, v_A 、 v_B 均沿水平方向, 则杆 AB 作瞬时平移, $v_A = v_B$, v_C 也沿水平方向, 而杆 CD 上的点 D 速度(即推杆 DE 的平移速度) v_{DE} 应沿铅垂方向, 故杆 CD 的速度瞬心在点 D 。可见此时,

$$v_{DE} = 0$$

(2) 当 $\varphi = 0^\circ$ 、 180° 时, 杆 AB 的速度瞬心在点 B , 即 $v_B = 0$ 。而 v_A 、 v_C 均沿铅垂方向, 杆 CD 上 v_C 、 v_{DE} 均沿铅垂方向, 杆 CD 此时作瞬时平移, $v_{DE} = v_C$ 。图 9-9c 表示 $\varphi = 0^\circ$ 的情形。因

$$v_C = \frac{1}{2}v_A = 4.00 \text{ m/s}$$

故

$$v_{DE} = 4.00 \text{ m/s}$$

因此当 $\varphi = 0^\circ$ 时, $v_{DE} = 4.00 \text{ m/s}$ (\uparrow)

同理当 $\varphi = 180^\circ$ 时, $v_{DE} = 4.00 \text{ m/s}$ (\downarrow)

9-10 在瓦特行星传动机构中, 平衡杆 O_1A 绕轴 O_1 转动, 并借连杆 AB 带动曲柄 OB ; 而曲柄 OB 活动地装置在轴 O 上, 如图 9-10a 所示。在轴 O 上装有齿轮 I, 齿轮 II 与连杆 AB 固结于一体。已知: $r_1 = r_2 = 0.3\sqrt{3} \text{ m}$, $O_1A = 0.75 \text{ m}$, $AB = 1.5 \text{ m}$; 又平衡杆的角速度 $\omega_{O_1} = 6 \text{ rad/s}$ 。求当 $\gamma = 60^\circ$ 且 $\beta = 90^\circ$ 时, 曲柄 OB 和齿轮 I 的角速度。

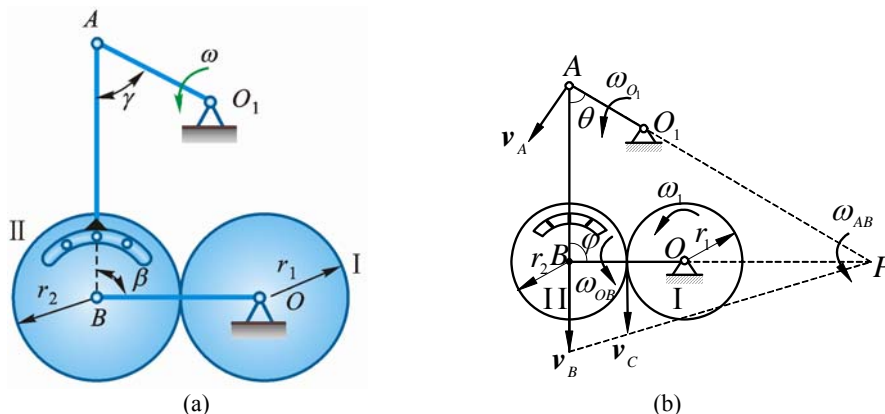


图 9-10

解 连杆 AB 作平面运动, 其它构件作定轴转动, 如图 9-10b 所示 $v_A \perp O_1A$, $v_B \perp OB$, 故连杆 AB 的速度瞬心在 AO_1 和 BO 延长线的交点 P 。设轮 I 与轮 II 的啮合点为 C 。此时 $\triangle ABP$ 为直角三角形, $\gamma = 60^\circ$, 由几何关系知:

$$PA = \frac{AB}{\cos \gamma} = 3.00 \text{ m}, \quad PB = AB \tan 60^\circ = 1.50\sqrt{3} \text{ m}$$

$$PC = PB - r_2 = 1.2\sqrt{3} \text{ m}$$

故

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{O_1A \cdot \omega_{O_1}}{PA} = 1.5 \text{ rad/s}$$

$$v_B = PB \cdot \omega_{AB} = 2.25\sqrt{3} \text{ m/s}, \quad v_C = PC \cdot \omega_{AB} = 1.8\sqrt{3} \text{ m/s}$$

曲柄 OB 的角速度

$$\omega_{OB} = \frac{v_B}{OB} = \frac{v_B}{r_1 + r_2} = 3.75 \text{ rad/s} \quad (\text{逆})$$

齿轮 I 的角速度

$$\omega_1 = \frac{v_C}{r_1} = 6 \text{ rad/s} \quad (\text{逆})$$

9-11 使砂轮高速转动的装置如图 9-11a 所示。杆 O_1O_2 绕 O_1 轴转动，转速为 n_4 。 O_2 处用铰链接 1 半径为 r_2 的活动齿轮 II，杆 O_1O_2 转动时轮 II 在半径为 r_3 的固定内齿轮 III 上滚动，并使半径为 r_1 的轮 I 绕 O_1 轴转动。轮 I 上装有砂轮，随同轮 I 高速转动。已知 $\frac{r_3}{r_1} = 11$ ， $n_4 = 900 \text{ r/min}$ ，求砂轮的转速。

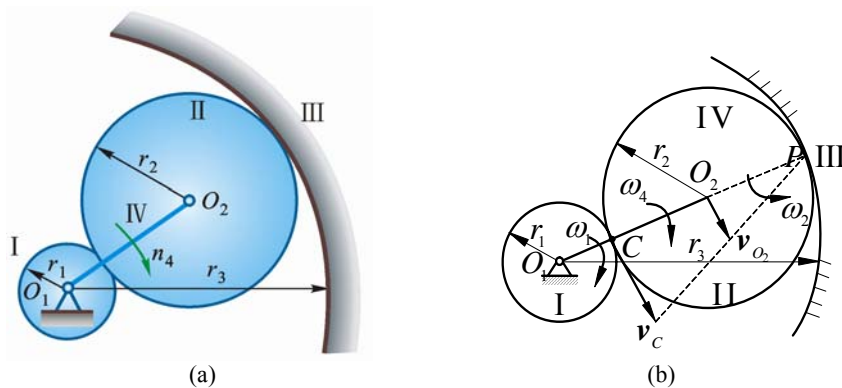


图 9-11

解 轮 II 作纯滚动，其速度瞬心在点 P ，如图 9-11b 所示。

$$v_{O_2} = O_1O_2\omega_4 = (r_1 + r_2)\omega_4$$

$$v_{O_2} = O_2P \cdot \omega_2 = r_2\omega_2, \quad \omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_4$$

轮 II 与轮 I 的切点 C 的速度

$$v_C = 2v_{O_2} = 2(r_1 + r_2)\omega_4$$

$$\omega_1 = \frac{v_C}{r_1} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}\omega_4 = \frac{(r_1 + r_3)}{r_1}\omega_4 = (1 + \frac{r_3}{r_1})\omega_4 = 12\omega_4$$

$$n_1 = 12n_4 = 10\,800 \text{ r/min} \quad (\downarrow)$$

***9-12** 图 9-12 所示小型精压机的传动机构， $OA = O_1B = r = 0.1 \text{ m}$ ， $EB = BD = AD = l = 0.4 \text{ m}$ 。在图 9-12b 所示瞬时， $OA \perp AD$ ， $O_1B \perp ED$ ， O_1D 在水平位置， OD 和 EF 在铅直位置。已知曲柄 OA 的转速 $n = 120 \text{ r/min}$ ，求此时压头 F 的速度。

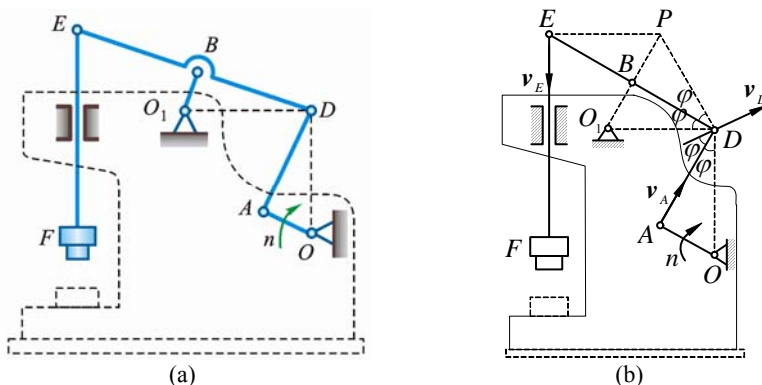


图 9-12

解 EF 作铅垂方向平移，点 B 绕 O_1 作圆周运动，速度分析如图 9-12b 所示，作 v_E ， v_B 的速度垂线，其交点即为杆 ED 的速度瞬心 P ，由几何关系知：

(1) $EP = PD$ ，所以点 D 速度的大小与点 E 速度大小相等，即

$$v_E = v_D$$

$$(2) \angle ADO = \angle BDO_1 = PED = \angle PDE = \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{OA}{\sqrt{OA^2 + AD^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

根据速度投影定理得

$$v_A = v_D \cos \varphi$$

由于

$$v_A = OA \cdot \frac{2\pi n}{60} = 0.40\pi \text{ m/s}$$

$$v_D = \frac{v_A}{\cos \varphi} = \frac{v_A \sqrt{r^2 + l^2}}{l} = \left(\frac{0.40\pi \sqrt{0.10^2 + 0.40^2}}{0.40} \right) \text{ m/s} = 1.295 \text{ m/s}$$

故得

$$v_F = v_E = v_D = 1.295 \text{ m/s} \quad (\downarrow)$$

9-13 图 9-13a 所示蒸汽机传动机构中, 已知: 活塞的速度为 v ; $O_1A_1 = a_1$, $O_2A_2 = a_2$, $CB_1 = b_1$, $CB_2 = b_2$; 齿轮半径分别为 r_1 和 r_2 ; 且有 $a_1b_2r_2 \neq a_2b_1r_1$ 。当杆 EC 水平, 杆 B_1B_2 铅直, A_1 , A_2 和 O_1 , O_2 都在同一条铅直线上时, 求齿轮 O_1 的角速度。

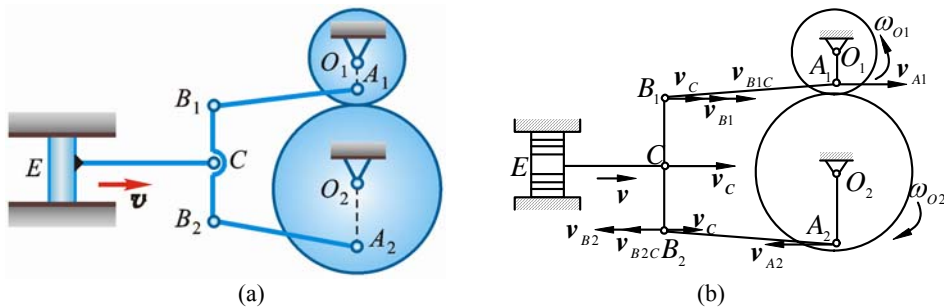


图 9-13

解 设杆 B_1B_2 的角速度为 $\omega_{B_1B_2}$, 以 C 为基点分析点 B_1 、 B_2 的速度, 如图 9-13b 所示。

因该瞬时 $v_C = v$ 且方向水平, B_1B_2 铅垂, 其他各速度矢均沿水平方向, 故有

$$v_{B_1} = b_1 \omega_{B_1B_2} + v \quad (1)$$

$$v_{B_2} = b_2 \omega_{B_1B_2} - v \quad (2)$$

因 $v_{B_1} \parallel v_{A_1}$ 、 $v_{B_2} \parallel v_{A_2}$, 故 A_1B_1 、 A_2B_2 均作瞬时平移。

设齿轮 O_1 , O_2 角速度分别为 ω_{O_1} 、 ω_{O_2} , 则

$$v_{B_1} = v_{A_1} = a_1 \omega_{O_1}, \quad v_{B_2} = v_{A_2} = a_2 \omega_{O_2}$$

代入式 (1)、(2) 得

$$a_1 \omega_{O_1} = b_1 \omega_{B_1B_2} + v \quad (3)$$

$$a_2 \omega_{O_2} = b_2 \omega_{B_1B_2} - v \quad (4)$$

由式 (3), (4) 得

$$a_1 b_2 \omega_{O_1} - a_2 b_1 \omega_{O_2} = (b_1 + b_2) v \quad (5)$$

根据齿轮传动关系有

$$\omega_{O_2} = \frac{r_1}{r_2} \omega_{O_1} \quad (6)$$

式 (6) 代入式 (5), 解得

$$\omega_{O_1} = \frac{(b_1 + b_2) r_2 v}{a_1 b_2 r_2 - a_2 b_1 r_1}$$

9-14 如图 9-14a 所示, 齿轮 I 在齿轮 II 内滚动, 其半径分别为 r 和 $R=2r$ 。曲柄 OO_1 绕轴 O 以等角速度 ω_o 转动, 并带动行星齿轮 I。求该瞬时轮 I 上瞬时速度中心 C 的加速度。

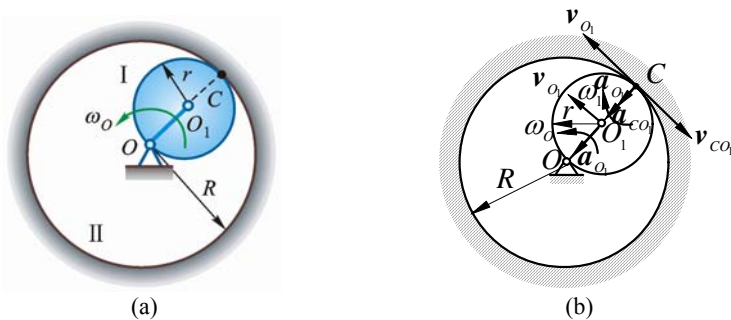


图 9-14

解 作平面运动的行星齿轮 I 在图 9-14b 所示位置的速度瞬心在其与定齿轮 II 的啮合点 C 上, 见图 9-14b。故

$$v_C = 0$$

因
$$v_{O_1} = OO_1 \cdot \omega_o = r\omega_o, \quad v_{O_1} = O_1C \cdot \omega_1 = r\omega_1$$

故
$$\omega_1 = \omega_o$$

以 O_1 为基点分析点 C 的加速度如图 9-14b 所示, 得

$$a_{O_1} = r\omega_o^2, \quad a_{CO_1} = O_1C \cdot \omega_1^2 = r\omega_o^2$$

由于 $a_C = a_{O_1} + a_{CO_1}$ 中各矢量共线, 故

$$a_C = a_{O_1} + a_{CO_1} = r\omega_o^2 + r\omega_o^2 = 2r\omega_o^2 \quad (\text{方向沿 } CO)$$

9-15 半径为 R 的轮子沿水平滚动而不滑动, 如图 9-15a 所示。在轮上有圆柱部分, 其半径为 r 。将线绕于圆柱上, 线的 B 端以速度 v 和加速度 a 沿水平方向运动。求轮的轴心 O 的速度和加速度。

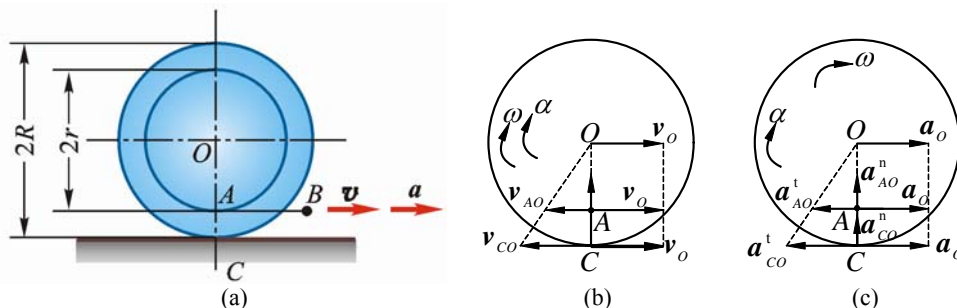


图 9-15

解 因轮子沿水平面滚动而不滑动, 所以轮上与地面接触点 C 的速度为 0, 且轮上 C 点的加速度沿水平方向的投影也为 0。以轮心 O 为基点分析轮上点 A 及点 C 的运动。设轮心 O 的速度为 v_o , 加速度为 a_o , 则

$$v_A = v_o + v_{AO}, \quad v_C = v_o + v_{CO}$$

设轮子滚动的角速度为 ω , 角加速度为 α , 则

$$v_{AO} = r\omega \cdot v_{CO} = R\omega, \quad v_C = 0, \quad v_A = v, \quad a_{AO}^t = r\alpha, \quad a_{CO}^t = R\alpha$$

由图 9-15b 得

$$v = v_o - r\omega \quad (1)$$

$$0 = v_o - R\omega \quad (2)$$

解式 (1)、(2) 得

$$v_o = \frac{R}{R-r} v$$

由图 9-15c 得

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO}^t + \mathbf{a}_{AO}^n, \quad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{CO}^t + \mathbf{a}_{CO}^n$$

将上 2 式向水平轴投影, 得

$$a_{Ax} = a_O - r\alpha \quad (3)$$

$$a_{Cx} = a_O - R\alpha \quad (4)$$

由于 $a_{Ax} = a$, $a_{Cx} = 0$, 故可从式 (3), (4) 解得

$$a_O = \frac{Ra}{R-r}$$

9-16 曲柄 OA 以恒定的角速度 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 绕轴 O 转动, 并借助连杆 AB 驱动半径为 r 的轮子在半径为 R 的圆弧槽中作无滑动的滚动。设 $OA=AB=R=2r=1\text{m}$, 求图 9-16a 所示瞬时点 B 和点 C 的速度与加速度。

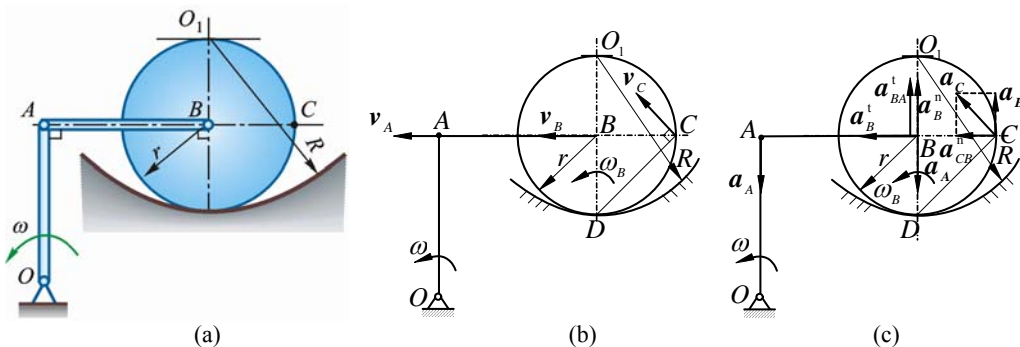


图 9-16

解 (1) 速度分析

$$v_A = R\omega$$

杆 AB 瞬时平移:

$$\omega_{AB} = 0, \quad v_B = v_A = R\omega = 2 \text{ m/s}, \quad \omega_B = \frac{v_B}{r} = 2\omega$$

$$v_C = \omega_B \cdot \sqrt{2}r = 2\sqrt{2}r\omega = \sqrt{2}R\omega = 2.828 \text{ m/s}$$

(2) 加速度分析

$$a_A = R\omega^2$$

OA 定轴转动, 以 A 为基点, 则

$$a_{BA}^n = 0$$

$$\mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t$$

$$\text{方向} \quad \uparrow \quad \leftarrow \quad \downarrow \quad \uparrow$$

$$\text{大小} \quad \frac{v_B^2}{R-r} \quad ? \quad R\omega^2 \quad ?$$

上式向 AB 方向投影, 得

$$a_B^t = 0, \quad a_B = 0$$

$$a_B = a_B^n = \frac{v_B^2}{R-r} = \frac{(R\omega)^2}{r} = 2R\omega^2 = 8 \text{ m/s}^2 \quad (\uparrow)$$

以 B 为基点, 则

$$a_{CB}^t = 0, \quad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n, \quad a_{CB}^n = r\omega_B^2 = r \cdot (2\omega)^2 = 4r\omega^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_C &= \sqrt{(4r\omega^2)^2 + (4r\omega^2)^2} = 2\sqrt{2}R\omega^2 = 11.31 \text{ m/s}^2 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right.$$

9-17 在曲柄齿轮椭圆规中, 齿轮 A 和曲柄 O_1A 固结为一体, 齿轮 C 和齿轮 A 半径为

r 并互相啮合, 如图 9-17a 所示。图中 $AB=O_1O_2$, $O_1A=O_2B=0.4\text{ m}$ 。 O_1A 以恒定的角速度 ω 绕 O_1 转动, $\omega = 0.2\text{ rad/s}$ 。 M 为轮 C 上 1 点, $CM=0.1\text{ m}$ 。在图 9-17a 所示瞬时, CM 为铅垂, 求此时点 M 的速度和加速度。

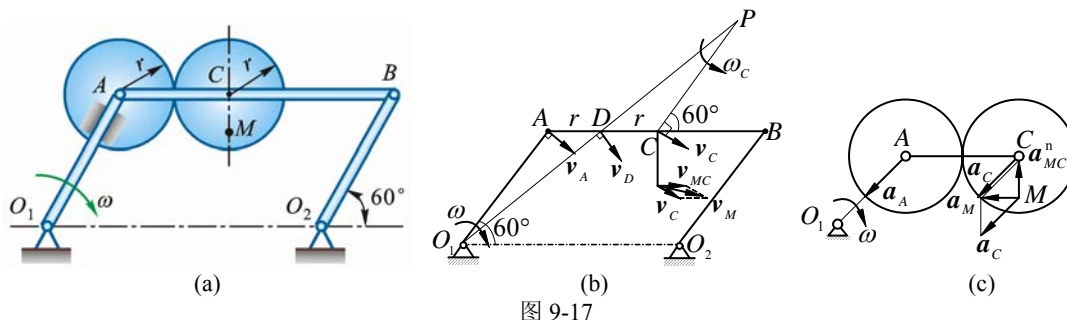


图 9-17

解 (1) 杆 AB 作曲线平移

$$v_A = v_C$$

轮 A 、 C 接触点线速度相同:

$$\omega_A = \omega_C = \omega = 0.2\text{ rad/s}$$

以 C 为基点, 则

$$v_M = v_C + v_{MC}, \quad v_C = 0.4\omega = 0.08\text{ m/s}$$

$$v_{MC} = 0.1\omega_C = (0.1 \times 0.2)\text{ m/s} = 0.02\text{ m/s}$$

$$v_M = \sqrt{v_C^2 + v_{MC}^2 + 2v_C v_{MC} \cos 30^\circ}$$

$$= \left(\sqrt{0.08^2 + 0.02^2 + 2 \times 0.08 \times 0.02 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \text{ m/s} \approx 0.0978\text{ m/s}$$

(2) ω 为常数, ω_C 为常数, $\alpha_C = 0$

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{MC}^n \quad (a_{MC}^t = 0)$$

$$a_C = a_A = O_1A \cdot \omega^2 = 0.4 \times 0.2^2 = 0.016$$

$$a_{MC} = a_{MC}^n = CM \cdot \omega_C^2 = 0.1 \times 0.2^2 = 0.004$$

$$a_M = \sqrt{a_C^2 + a_{MC}^2 - 2a_C a_{MC} \cos 30^\circ}$$

$$= \left(\sqrt{0.016^2 + 0.004^2 - 2 \times 0.016 \times 0.004 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \text{ m/s}^2 = 0.0127\text{ m/s}^2$$

9-18 在图 9-18a 所示曲柄连杆机构中, 曲柄 OA 绕轴 O 转动, 其角速度为 ω_O , 角加速度为 α_O 。在某瞬时曲柄与水平线间成 60° 角, 而连杆 AB 与曲柄 OA 垂直。滑块 B 在圆形槽内滑动, 此时半径 O_1B 与连杆 AB 间成 30° 角。如 $OA=r$, $AB=2\sqrt{3}r$, $O_1B=2r$, 求在该瞬时, 滑块 B 的切向和法向加速度。

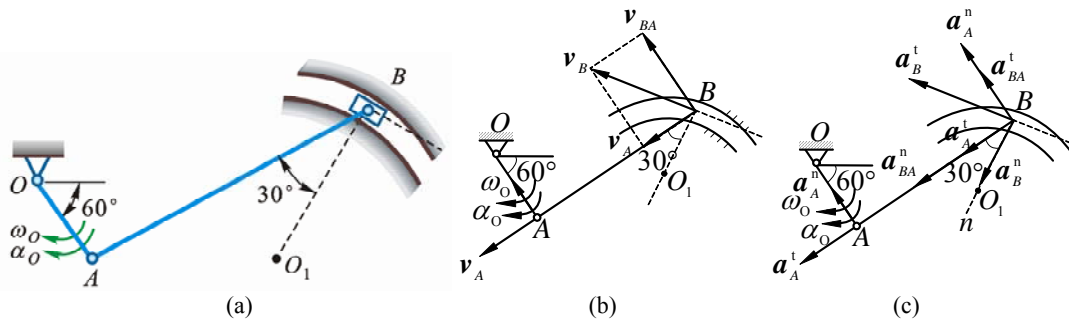


图 9-18

解 曲柄 OA 上点 A 的速度和加速度为

$$v_A = r\omega_O; \quad a_A^n = r\omega_O^2, \quad a_A^t = r\alpha_O$$

以点 A 为基点分析杆 AB 上点 B 的速度与加速度, 如图 9-18b、图 9-18c 所示, 则点 B 的速度为

$$v_B = \frac{v_A}{\sin 30^\circ} = 2r\omega_O$$

且

$$v_{BA} = v_B \cos 30^\circ = \sqrt{3}r\omega_O$$

将

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_B^n = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n$$

分别向轴 n , 轴 t 投影, 得

$$a_B^n = a_A^t \cos 30^\circ + a_{BA}^n \cos 30^\circ - a_{BA}^t \sin 30^\circ - a_A^n \sin 30^\circ \quad (1)$$

$$a_B^t = a_A^t \sin 30^\circ + a_{BA}^n \sin 30^\circ + a_{BA}^t \cos 30^\circ + a_A^n \cos 30^\circ \quad (2)$$

将 $a_B^n = \frac{v_B^2}{O_1B} = 2r\omega_O^2, \quad a_{BA}^n = \frac{a_{AB}^2}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega_O^2$

代入式 (1)、(2), 解得

$$a_B^t = r \cdot (2\alpha_O - \sqrt{3}\omega_O^2)$$

因此滑块 B 的加速度为

$$a_B^n = 2r\omega_O^2, \quad a_B^t = r \cdot (2\alpha_O - \sqrt{3}\omega_O^2)$$

9-19 在图 9-19a 所示机构中, 曲柄 OA 长为 r , 绕轴 O 以等角速度 ω_O 转动, $AB = 6r$, $BC = 3\sqrt{3}r$ 。求图 9-19 所示位置时, 滑块 C 的速度和加速度。

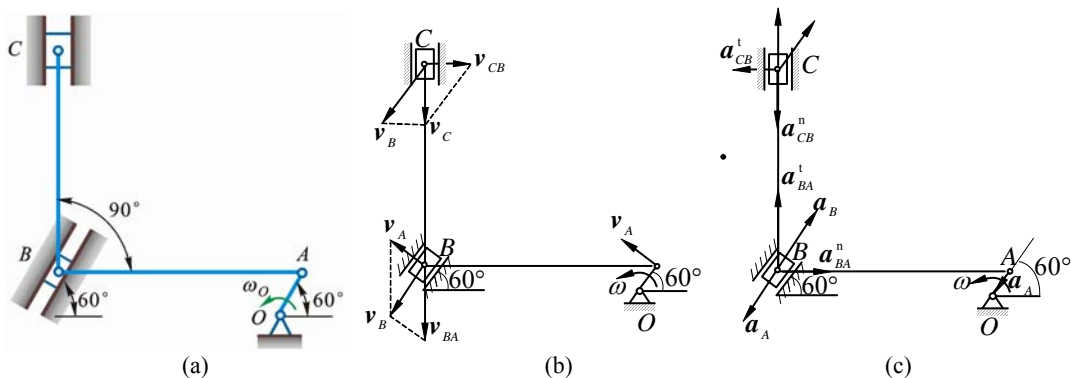


图 9-19

解 (1) 以 A 为基点, 分析杆 AB 上点 B 的速度和加速度, 如图 9-19b、图 9-19c 所示。由于

$$v_A = r\omega_O, \quad a_A = r\omega_O^2$$

由速度分析图 9-19b 得

$$v_B = v_A \tan 60^\circ = \sqrt{3}r\omega_O, \quad v_{BA} = \frac{v_A}{\cos 60^\circ} = 2r\omega_O$$

由加速度分析图 9-19c 得

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n$$

上式分别向 B 的滑道及垂直于滑道方向投影, 有

$$0 = a_{BA}^n \sin 60^\circ - a_{BA}^t \sin 30^\circ \quad (1)$$

$$a_B = a_{BA}^n \cos 60^\circ + a_{BA}^t \cos 30^\circ - a_A \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 解得

$$a_{BA}^t = \sqrt{3}a_{BA}^n = \sqrt{3} \frac{(2r\omega_O)^2}{6r} = \frac{2}{3}\sqrt{3}r\omega_O^2$$

$$a_B = \frac{(2r\omega_o)^2}{6r} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3}r\omega_o^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - r\omega_o^2 = \frac{1}{3}r\omega_o^2$$

(2) 以 B 为基点, 分析杆 BC 上点 C 的速度和加速度, 如图 9-19b、图 9-19c 所示。
由图 9-19b 得

$$v_C = v_B \cos 30^\circ = \frac{3}{2}r\omega_o \quad (\downarrow)$$

$$v_{CB} = v_B \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}r\omega_o$$

由图 c 得

$$a_C = a_B \cos 30^\circ - a_{CB}^n = \frac{1}{3}r\omega_o^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega_o)^2}{3\sqrt{3}r} = \frac{\sqrt{3}}{12}r\omega_o^2 (\uparrow)$$

9-20 塔轮 1 半径为 $r = 0.1 \text{ m}$ 和 $R = 0.2 \text{ m}$, 绕轴 O 转动的规律是 $\varphi = t^2 - 3t \text{ rad}$, 并通过不可伸长的绳子卷动滑轮 2, 滑轮 2 的半径为 $r_2 = 0.15 \text{ m}$ 。设绳子与各轮之间无相对滑动, 求 $t = 1 \text{ s}$ 时, 滑轮 2 的角速度和角加速度; 并求该瞬时水平直径上 C, D, E 各点的速度和加速度。

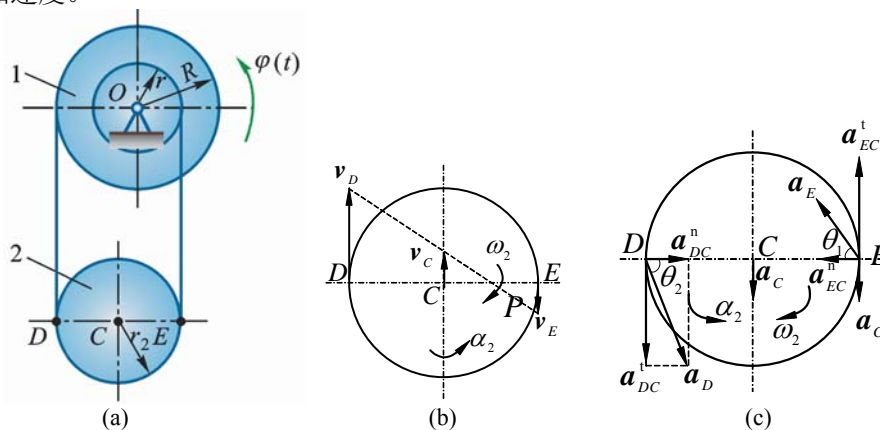


图 9-20

解 $t = 1 \text{ s}$ 时,

$$\varphi = t^2 - 3t = -2 \text{ rad}, \quad \dot{\varphi} = 2t - 3 = -1 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\varphi} = 2 \text{ rad/s}^2$$

$$v_D = R|\dot{\varphi}| = 0.2 \text{ m/s} \quad (\uparrow), \quad v_E = r|\dot{\varphi}| = 0.1 \text{ m/s} \quad (\downarrow)$$

找出滑轮 2 速度瞬心点 P :

$$DP = 2PE, \quad CP = \frac{1}{2}PE$$

$$v_C = \frac{1}{2}v_E = 0.05 \text{ m/s} \quad (\uparrow)$$

$$\omega_2 = \frac{v_E}{\frac{2}{3}r_2} = \frac{0.1}{\frac{2}{3} \times 0.15} = 1 \text{ rad/s} \quad (\downarrow)$$

点 P 的铅垂加速度也为零。

$$\alpha_2 = \frac{r\ddot{\varphi}}{\frac{2}{3}r^2} = \frac{0.1 \times 2}{\frac{2}{3} \times 0.15} = 2 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{逆})$$

轮心 C 加速度 a_C 只能沿铅垂上下方向,

$$a_C = PC \cdot \alpha_2 = (0.05 \times 2) \text{ m/s}^2 = 0.1 \text{ m/s}^2 \quad (\downarrow)$$

以 C 为基点:

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{EC}^n + \mathbf{a}_{EC}^t$$

方向	?	↓	←	↑
大小	?	√	√	√

$$a_{EC}^n = r_2 \omega_2^2 = (0.15 \times 1^2) \text{ m/s}^2 = 0.15 \text{ m/s}^2$$

$$a_{EC}^t = r_2 \alpha_2 = (0.15 \times 2) \text{ m/s}^2 = 0.3 \text{ m/s}^2$$

$$a_E = \sqrt{(a_{EC}^t - a_C)^2 + (a_{EC}^n)^2} = \left(\sqrt{(0.3 - 0.1)^2 + 0.15^2} \right) \text{ m/s}^2 = 0.25 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \theta_1 = 4/3$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{DC}^n + \mathbf{a}_{DC}^t, \quad a_{DC}^n = 0.15, \quad a_{DC}^t = 0.3$$

$$a_D = \sqrt{(a_{DC}^t + a_C)^2 + (a_{DC}^n)^2} = \left(\sqrt{(0.3 + 0.1)^2 + 0.15^2} \right) \text{ m/s}^2 = 0.427 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \theta_2 = \frac{0.4}{0.15} = \frac{8}{3}$$

9-21 为加快电缆释放速度, 装有电缆卷轴的拖车 (图 9-21a) 以加速度 0.9 m/s^2 从静止开始运动。与此同时, 另 1 卡车以加速度 0.6 m/s^2 水平地拉着电缆自由端向相反方向运动。求当运动刚开始时以及运动开始后 1 s 时, 卷轴水平直径上点 A 的全加速度。

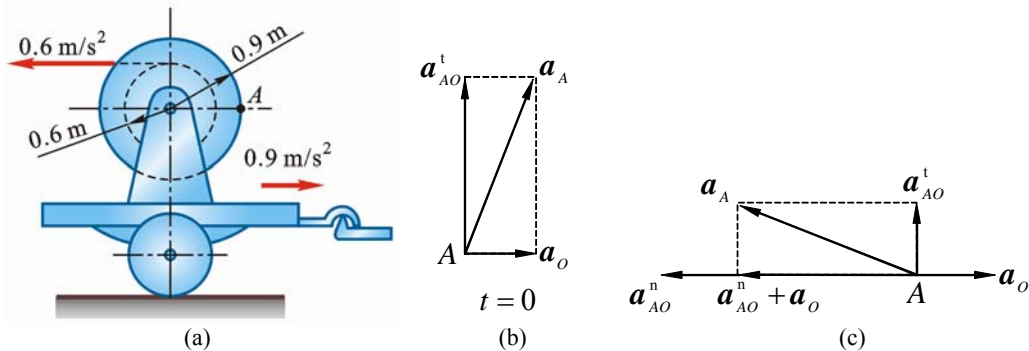


图 9-21

解 (1) 运动刚开始时 (图 9-21b), $\omega = 0$

$$\alpha = \frac{0.6 + 0.9}{0.6} = 2.5 \text{ rad/s}^2, \quad a_{AO}^t = 0.9\alpha = (0.9 \times 2.5) \text{ m/s}^2 = 2.25 \text{ m/s}^2$$

$$a_o = 0.9 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = \sqrt{(a_{AO}^t)^2 + a_o^2} = \left(\sqrt{2.25^2 + 0.9^2} \right) \text{ m/s}^2 = 2.423 \text{ m/s}^2$$

(2) $t = 1 \text{ s}$ 时 (图 9-21c)

$$\omega = \alpha t = 2.5 \text{ rad/s}, \quad a_o = 0.9 \text{ m/s}^2$$

$$a_{AO}^n = 0.9\omega^2 = (0.9 \times 2.5^2) \text{ m/s}^2 = 5.625 \text{ m/s}^2$$

$$a_{AO}^t = 0.9\alpha = (0.9 \times 2.5) \text{ m/s}^2 = 2.25 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = \sqrt{(a_{AO}^n - a_o)^2 + (a_{AO}^t)^2} = \left(\sqrt{(5.625 - 0.9)^2 + 2.25^2} \right) \text{ m/s}^2 = 5.233 \text{ m/s}^2$$

9-22 图 9-22a 所示直角刚性杆, $AC=CB=0.5 \text{ m}$, 设在图 9-22b 所示的瞬时, 两端滑块沿水平与铅垂轴的加速度, 大小分别为 $a_A = 1 \text{ m/s}^2$, $a_B = 3 \text{ m/s}^2$ 。求这时直角杆的角速度和角加速度。

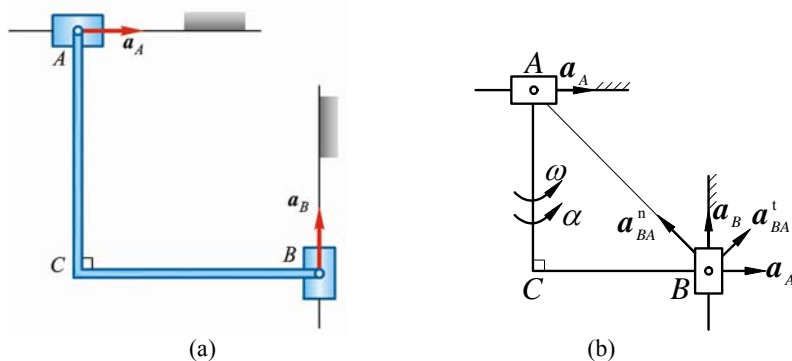


图 9-22

解 以 A 为基点

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t \quad (1)$$

方向	↑	→	√	√
大小	a_B	a_A	?	?

上式向 \mathbf{a}_{BA}^n 投影, 得

$$a_B \cos 45^\circ = -a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^n$$

即 $a_{BA}^n = (a_B + a_A) \cos 45^\circ, \quad 0.5\sqrt{2}\omega_{AB}^2 = (3+1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$$

式 (1) 向 \mathbf{a}_{BA}^t 投影, 得

$$a_B \cos 45^\circ = a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^t$$

$$a_{BA}^t = (a_B - a_A) \cos 45^\circ, \quad 0.5\sqrt{2} \cdot \alpha_{AB} = (3-1) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_{AB} = 2 \text{ rad/s}^2$$

***9-23** 图 9-23a 所示曲柄连杆机构带动摇杆 O_1C 绕轴 O_1 摆动。在连杆 AB 上装有两个滑块, 滑块 B 在水平槽内滑动, 而滑块 D 则在摇杆 O_1C 的槽内滑动。已知: 曲柄长 $OA=50 \text{ mm}$, 绕轴 O 转动的匀角速度 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 。在图示位置时, 曲柄与水平线间 90° 角, $\angle OAB = 60^\circ$, 摇杆与水平线间成 60° 角; 距离 $O_1D = 70 \text{ mm}$ 。求摇杆的角速度和角加速度。

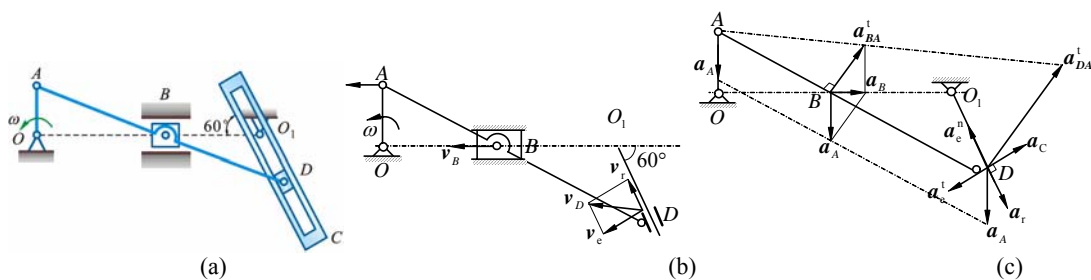


图 9-23

解 (1) 机构中曲柄 OA 和摇杆 O_1C 作定轴转动, 连杆 ABD 作平面运动, 滑块 B 作水平直线运动, 在此瞬时, \mathbf{v}_A 和 \mathbf{v}_B 均沿水平方向, 故连杆 ABD 作瞬时平移, 则

$$v_D = v_B = v_A = OA \cdot \omega = 0.50 \text{ m/s}$$

以点 D 为动点, 动系固结于摇杆, 点 D 在速度分析如图 9-23b 所示。由于

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

$$v_e = O_1D \cdot \omega_1, \quad v_e = v_D \sin 60^\circ, \quad v_r = v_D \cos 60^\circ = 0.25 \text{ m/s}$$

故

$$\omega_1 = \frac{v_D}{O_1 D} \sin 60^\circ = 6.186 \text{ rad/s (顺)}$$

(2) 如图 9-23c 所示, D 为动点, $O_1 C$ 为动系, 则

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (2)$$

以 A 为基点得

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t \quad (\text{图 9-23b 所示瞬时, } \omega_{AB} = 0) \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}^t \quad (4)$$

式 (3) 向 \mathbf{a}_A 方向投影, 得

$$0 = a_A - a_{BA}^t \cos 30^\circ, \quad a_A = OA \cdot \omega^2 = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{ABD} = a_{BA}^t / AB = a_A / (AB \cos 30^\circ) = 5 / (0.1 / \cos 30^\circ) = 100 / \sqrt{3} \text{ rad/s}^2$$

$$a_{DA}^t = AD \cdot \alpha_{ABD} = [(100 + 70\sqrt{3}) \times 10^{-3} \times 100 / \sqrt{3}] \text{ m/s}^2 = 12.77 \text{ m/s}^2$$

由式 (2)、(4) 得

$$\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}^t = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

上式向 \mathbf{a}_e^t 方向投影, 得

$$-a_A \cos 60^\circ + a_{DA}^t \cos 30^\circ = a_e^t + a_C$$

$$a_C = 2\omega_1 \cdot v_r = (2 \times 6.186 \times 0.25) \text{ m/s}^2 = 3.093 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{O_1 D} = 78.08 \text{ rad/s}^2 \text{ (逆)}$$

9-24 如图 9-24a 所示, 轮 O 在水平面上滚动而不滑动, 轮心以匀速 $v_O = 0.2 \text{ m/s}$ 运动, 轮缘上固连销钉 B , 此销钉在摇杆 $O_1 A$ 的槽内滑动, 并带动摇杆绕 O_1 轴转动。已知: 轮的半径 $R = 0.5 \text{ m}$, 在图 9-24b 所示位置时, AO_1 是轮的切线, 摇杆与水平面间的交角为 60° 。求摇杆在该瞬时的角速度和角加速度。

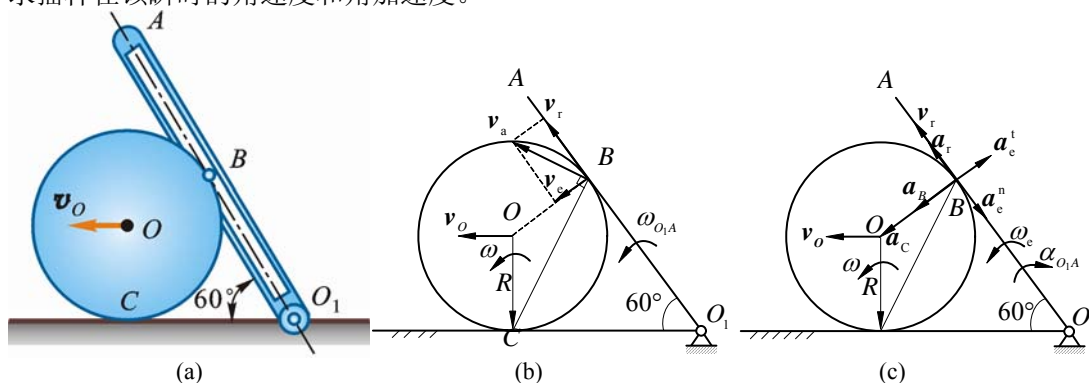


图 9-24

解 (1) 运动分析

轮 O 上点 B 为动点, 动系固结于 $O_1 A$; 绝对运动为平面曲线 (摆线), 相对运动沿 $O_1 A$ 直线, 牵连运动为绕 O_1 定轴转动。

(2) 速度分析, 如图 9-24b 所示

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

方向 $\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$

大小 $\checkmark \quad ? \quad ?$

$$CB = \sqrt{3}CO$$

$$v_a = \sqrt{3}v_O, \quad v_e = \frac{1}{2}v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}v_O$$

杆 O_1A 角速度

$$\omega_{O_1A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}v_O}{\sqrt{3}R} = \frac{v_O}{2R} = 0.2 \text{ rad/s}$$

$$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2}v_a = \frac{3}{2}v_O, \quad \omega = \frac{v_O}{R}$$

(3) 加速度分析, 如图 9-24c 所示

① 轮 O 作平面运动, 以 O 为基点, $a_O = 0, \alpha = 0$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{BO}^n + \mathbf{a}_{BO}^t \quad (2)$$

方向 ? \checkmark BO \checkmark

大小 ? 0 $R\omega^2$ 0

$$a_B = a_{BO}^n, \quad a_B = R\omega^2 = \frac{v_O^2}{R}$$

② 轮 O 上点 B 为动点, 动系固结于 O_1A :

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (3)$$

方向 沿 BO BO_1 $\perp BO_1$ 沿 O_1B $\perp \mathbf{v}_r$

大小 $R\omega^2$ $O_1B \cdot \omega_e^2$? ? $2\omega_e v_r$

式 (3) 向 \mathbf{a}_B 方向投影, 得

$$a_B = -a_e^t + a_C$$

$$a_e^t = a_C - a_a = 2\omega_{O_1A}v_r - \frac{v_O^2}{R} = 2 \cdot \frac{v_O}{2R} \cdot \frac{3}{2}v_O - \frac{v_O^2}{R} = \frac{v_O^2}{2R}$$

杆 O_1A 角加速度

$$\alpha_{O_1A} = \frac{a_e^t}{O_1B} = \frac{\frac{v_O^2}{2R}}{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = \frac{\sqrt{3}}{6R^2}v_O^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 0.2^2 \times \frac{1}{0.5^2} = 0.0462 \text{ rad/s}^2$$

9-25 平面机构的曲柄 OA 长为 $2l$, 以匀角速度 ω_O 绕轴 O 转动。在图 9-25a 所示位置时, $AB=BO$, 并且 $\angle OAD = 90^\circ$ 。求此时套筒 D 相对杆 BC 的速度和加速度。

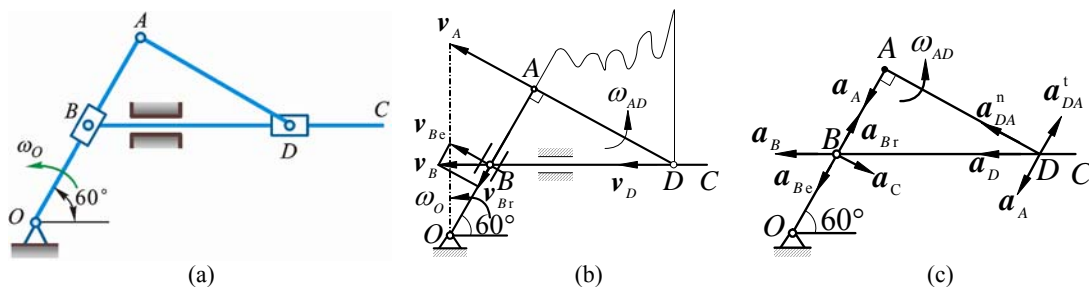


图 9-25

解 (1) 运动分析

BC 上 B 为动点, 动系固结于 OA ; 绝对运动为水平直线, 相对运动沿直线 OA , 牵连运动为绕 O 定轴转动。

(2) 速度分析

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{Be} + \mathbf{v}_{Br}, \quad v_{Be} = l\omega_O$$

$$v_B = \frac{v_{Be}}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}l\omega_O \quad (1)$$

$$v_{Br} = v_{Be} \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} l \omega_o, \quad v_A = 2l \omega_o$$

AD 作平面运动，用速度投影定理，得

$$v_D \cos 30^\circ = v_A, \quad v_D = \frac{2l \omega_o}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} l \omega_o$$

套筒 D 相对杆 BC 速度

$$v_r = v_D - v_B = \frac{2\sqrt{3}}{3} l \omega_o = 1.15 l \omega_o \quad (\leftarrow)$$

找 AD 的瞬心 P，得

$$AP = 3l, \quad \omega_{AD} = \frac{v_A}{3l} = \frac{2l \omega_o}{3l} = \frac{2}{3} \omega_o$$

(3) 加速度分析

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{Be} + \mathbf{a}_{Br} + \mathbf{a}_C \quad (3)$$

$$a_C = 2\omega_e v_{Br} = 2\omega_o \frac{\sqrt{3}}{3} l \omega_o = \frac{2\sqrt{3}}{3} l \omega_o^2$$

式 (3) 向 a_C 向投影，得

$$\begin{aligned} -a_B \cos 30^\circ &= a_C \\ a_B &= -\frac{a_C}{\cos 30^\circ} = -\frac{4}{3} l \omega_o^2 \\ a_A &= 2l \omega_o^2 \end{aligned} \quad (4)$$

以 A 为基点：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA}^n + \mathbf{a}_{DA}^t \\ a_{DA}^n &= \sqrt{3} l \omega_{AD}^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9} l \omega_o^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) 向 \mathbf{a}_{DA}^n 向投影，得

$$a_D \cos 30^\circ = a_{DA}^n, \quad a_D = \frac{a_{DA}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{8}{9} l \omega_o^2$$

套筒 D 相对杆 BC 的加速度

$$a_r = a_D - a_B = \frac{8}{9} l \omega_o^2 + \frac{4}{3} l \omega_o^2 = \frac{20}{9} l \omega_o^2 = 2.22 l \omega_o^2 \quad (\leftarrow)$$

***9-26** 为使货车车厢减速，在轨道上装有液压减速顶，如图 9-26a 所示。半径为 R 的车轮滚过时，将压下减速顶的顶帽 AB 而消耗能量，降低速度。如轮心的速度为 v ，加速度为 a ，求 AB 下降速度、加速度和减速顶对于轮子的相对滑动速度与角 θ 的关系（设轮与轨道之间无相对滑动）。

解 (1) 运动分析

AB 上与轮 O 的接触点 A 为动点，动系固连于轮 O；绝对运动上下直线，相对运动为圆周运动，牵连运动为平面运动。

(2) 速度分析

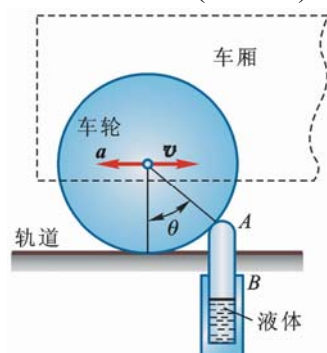
$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_a = & \mathbf{v}_e + & \mathbf{v}_r \\ \text{方向} & AB & \perp CA \quad \perp OA \\ \text{大小} & ? & CA\omega \quad ? \end{array}$$

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad v_e = 2R \sin \frac{\theta}{2} \cdot \omega = 2v \sin \frac{\theta}{2}$$

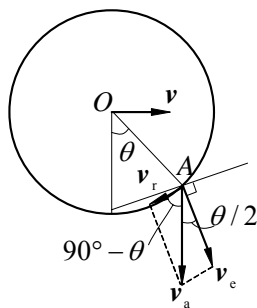
$$\frac{v_e}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{v_a}{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2})} = \frac{v_r}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$v_r = v_e \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \theta} = v \tan \theta \tan \frac{\theta}{2}$$

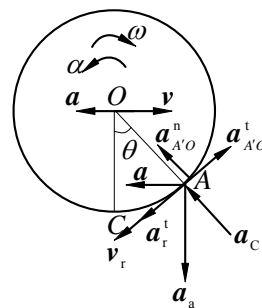
$$v_{AB} = v_a = \frac{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2})}{\sin(90^\circ - \theta)} v_e = v \tan \theta$$



(a)



(b)



(c)

图 9-26

(3) 加速度分析

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^t, \quad \mathbf{a}_O = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO}^n + \mathbf{a}_{AO}^t + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_C$$

$$\text{方向} \quad \downarrow \quad \leftarrow \quad \text{沿 } AO \quad \perp AO \quad \text{沿 } AO \quad \perp AO \quad \text{沿 } AO$$

$$\text{大小} \quad ? \quad a \quad R\omega^2 \quad R\alpha \quad \frac{v_r^2}{R} \quad ? \quad 2\omega v_r$$

上式向 \mathbf{a}_{AO}^n 方向投影, 得

$$-a_a \cos \theta = a \sin \theta + a_{AO}^n + a_r^n + a_C = a \sin \theta + R\omega^2 + \frac{v_r^2}{R} + 2\omega v_r$$

$$= a \sin \theta + \frac{v^2}{R} + \frac{v^2}{R} \tan^2 \theta \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2 \cdot \frac{v^2}{R} \tan \theta \tan \frac{\theta}{2}$$

$$a_a = -\frac{1}{\cos \theta} \left[a \sin \theta + \frac{v^2}{R} \left(1 + \tan^2 \theta \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2 \tan \theta \tan \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$= -\left[\left(a \tan \theta + \frac{v^2}{R \cos \theta} \left(1 + \tan \theta \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \right]$$

$$a_a = -\left(a \tan \theta + \frac{v^2}{R \cos^3 \theta} \right) \quad (\uparrow) \quad (\text{与图示反向})$$

***9-27** 已知图 9-27a 所示机构中滑块 A 的速度为常数, $v_A = 0.2 \text{ m/s}$, $AB = 0.4 \text{ m}$ 。求当 $AC = CB$, $\theta = 30^\circ$ 时, 杆 CD 的速度和加速度。

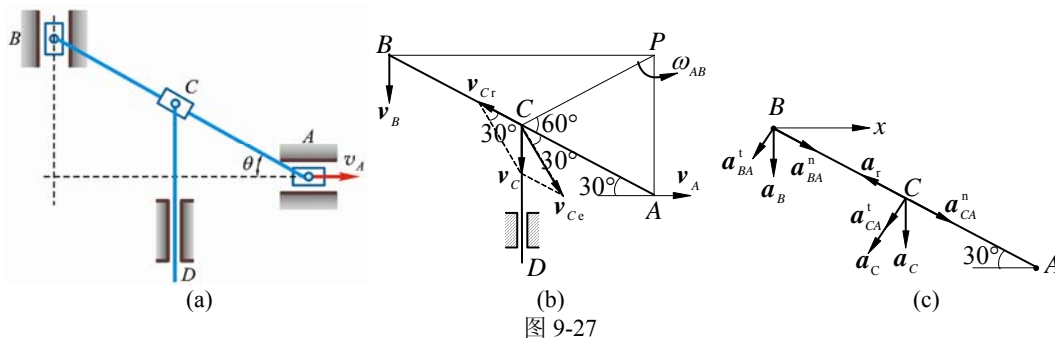


图 9-27

解 (1) 运动分析

杆 AB 作平面运动。选 CD 上 C 为动点，动系固结于 AB ；绝对运动为上下直线；相对运动沿直线 AB ，牵连运动为平面运动。

(2) 速度分析

如图 9-27b 所示，杆 AB 瞬心在点 P ，

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{0.2}{0.2} = 1 \text{ rad/s}, \quad v_{Ce} = PC \cdot \omega_{AB} = 0.2 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{Ce} + \mathbf{v}_{Cr}$$

上式向 $\perp \mathbf{v}_{Cr}$ 方向投影，得

$$v_C \cos 30^\circ = v_{Ce} \cos 60^\circ, \quad v_C = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} v_{Ce} = \frac{v_{Ce}}{\sqrt{3}} = 0.1155 \text{ m/s}$$

$$v_{Cr} = \sqrt{v_C^2 + v_{Ce}^2 - 2v_C v_{Ce} \cos 30^\circ} = 0.1155 \text{ m/s}$$

(3) 加速度分析，(如图 9-27c 所示)

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{CA}^n + \mathbf{a}_{CA}^t$$

$$\text{以 } A \text{ 为基点, } \mathbf{a}_A = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = (0.4 \times 1^2) \text{ m/s}^2 = 0.4 \text{ m/s}^2$$

式 (3) 向 x 方向投影，得

$$0 = a_{BA}^n \cos 30^\circ - a_{BA}^t \cos 60^\circ$$

$$a_{BA}^t = \sqrt{3} a_{BA}^n = (0.4\sqrt{3}) \text{ m/s}^2 = 0.6928 \text{ m/s}^2$$

$$a_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \sqrt{3} = 1.732 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{C'A}^t = AC \cdot \alpha_{AB} = (0.2 \times 1.732) \text{ m/s}^2 = 0.346 \text{ m/s}^2$$

$$a_C = 2\omega_{AB} v_{Cr} = (2 \times 1 \times 0.1155) \text{ m/s}^2 = 0.231 \text{ m/s}^2$$

式 (1) 向 \mathbf{a}_C 方向投影，得

$$a_C \cos 30^\circ = a_{Ac}^t + a_C$$

$$a_C = \frac{0.3464 + 0.231}{\cos 30^\circ} = 0.667 \text{ m/s}^2$$

9-28 轻型杠杆式推钢机，曲柄 OA 借连杆 AB 带动摇杆 O_1B 绕 O_1 轴摆动，杆 EC 以铰链与滑块 C 相连，滑块 C 可沿杆 O_1B 滑动；摇杆摆动时带动杆 EC 推动钢材，如图 9-28a

所示。已知 $OA = r$ ， $AB = \sqrt{3}r$ ， $O_1B = \frac{2}{3}l$ ($r = 0.2 \text{ m}, l = 1 \text{ m}$)， $\omega_{OA} = \frac{1}{2} \text{ rad/s}$ 。在图

9-28 所示位置时, $BC = \frac{4}{3}l$ 。求:

- (1) 滑块 C 的绝对速度和相对于摇杆 O_1B 的速度;
- (2) 滑块 C 的绝对加速度和相对摇杆 O_1B 的加速度。

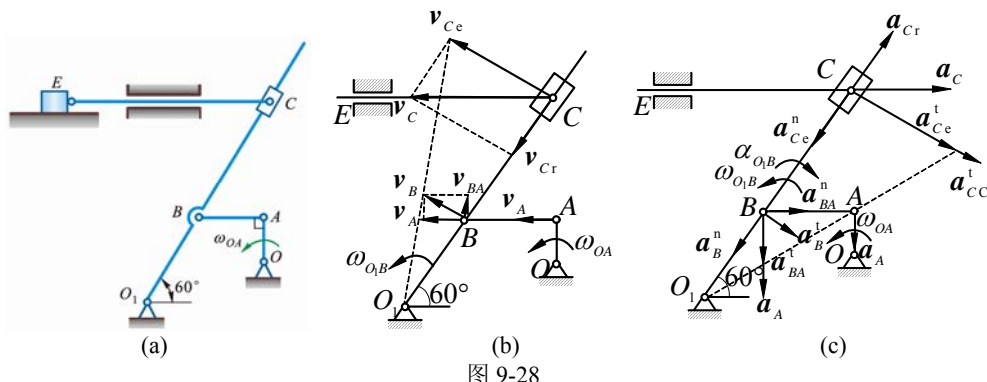


图 9-28

解 (1) 速度分析

- ① 以 A 为基点分析杆 AB 上的点 B 的速度, 如图 9-28b 所示。由速度分析图得

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 0.1 \text{ m/s}, \quad v_{BA} = v_A \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{30} \text{ m/s}, \quad v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{15} \text{ m/s}$$

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ rad/s (逆)}, \quad \omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{1}{6} \text{ rad/s (顺)}$$

- ② 以滑块 C 为动点, 动系固结于 O_1BC , 速度分析如图 9-28b 所示

$$v_{Oe} = O_1C \cdot \omega_{O_1B} = (O_1B + BC)\omega_{O_1B} = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ m/s}$$

$$v_C = \frac{v_{Ce}}{\cos 30^\circ} = 0.4 \text{ m/s}, \quad v_{Cr} = v_C \sin 30^\circ = 0.2 \text{ m/s}$$

(2) 加速度分析

- ① 以 A 为基点, 分析杆 AB 上点 B 的加速度

设 O_1B 的角加速度为 α_{O_1B} , 加速度分析如图 9-28c 所示

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t \quad (1)$$

上式向水平方向投影得

$$a_B^t \cos 30^\circ - a_B^n \sin 30^\circ = \alpha_{BA}^n$$

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{180} \text{ m/s}^2, \quad a_B^n = O_1B \cdot \omega_{O_1B}^2 = 0.02 \text{ m/s}^2$$

故
$$a_B^t = \frac{2}{\sqrt{3}} (a_{BA}^n + a_B^n \sin 30^\circ) = 0.02266 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = \frac{a_B^t}{O_1B} = 0.034 \text{ rad/s}^2 \text{ (顺)}$$

- ② 以 EC 上点 C 为动点, 动系固结于杆 O_1B , 加速度分析如图 9-28c 所示

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{Ce}^n + \mathbf{a}_{Ce}^t + \mathbf{a}_{Cr} + \mathbf{a}_{CC} \quad (2)$$

式 (2) 向 \mathbf{a}_{Ce}^t 方向投影得

$$a_C \cos 30^\circ = a_{Ce}^t + a_{CC}$$

$$a_{Ce}^t = O_1C \cdot \alpha = 0.068 \text{ m/s}^2, \quad a_{CC} = 2\omega_{O_1B} v_{Cr} = 0.0693 \text{ m/s}^2$$

$$a_C = \frac{2}{\sqrt{3}}(a_{Ce}^t + a_{CC}) = 0.1585 \text{ m/s}^2 \quad (\rightarrow)$$

式(2)向 O_1B 方向投影得

$$\begin{aligned} a_C \sin 30^\circ &= a_{Cr} - a_{Ce}^n \\ a_{Cr} &= a_C \sin 30^\circ + a_{Ce}^n = a_C \sin 30^\circ + O_1C \cdot \omega_{O_1B}^2 \\ &= 0.1585 \sin 30^\circ + 2 \cdot \frac{3}{100} = 0.139 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

9-29 图 9-29a 所示的平面机构中, 杆 AB 以不变的速度 v 沿水平方向运动, 套筒 B 与杆 AB 的端点铰接, 并套在绕 O 轴转动的杆 OC 上, 可沿该杆滑动。已知 AB 和 OE 两平行线间的垂直距离为 b 。求在图示位置 ($\gamma = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $OD = BD$) 时, 杆 OC 的角速度和角加速度、滑块 E 的速度和加速度。

解 (1) 速度分析, 如图 9-29b 所示

① 取套筒 B 为动点, 动系固结于杆 OC , 点 B 的速度分析如图 9-29b 所示。

$$v_{Be} = v_B \cos 30^\circ = v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v, \quad v_{Br} = v_B \sin 30^\circ = \frac{1}{2}v$$

$$\omega_{OC} = \frac{v_{Be}}{OB} = \frac{3v}{4b} \quad (\text{顺})$$

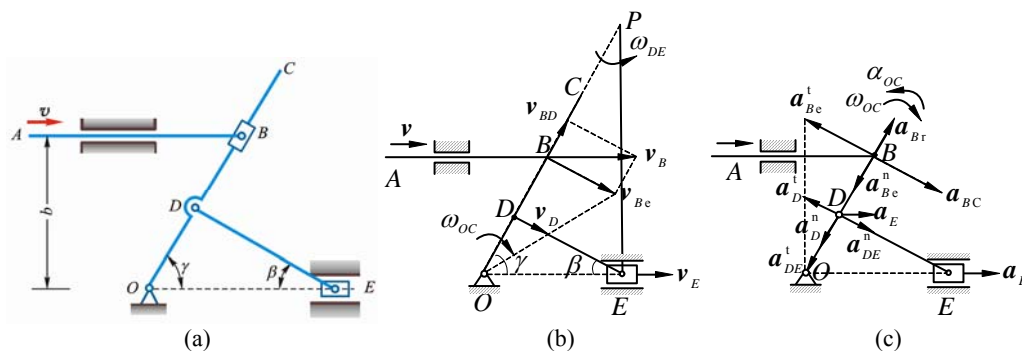


图 9-29

② 作 v_D 及 v_E 的垂线得交点 P 为杆 DE 在图示位置的速度瞬心, 设其角速度为 ω_{DE} 。

$$OD = \frac{b}{2 \cos 30^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad DE = OD \cot 30^\circ = b, \quad PD = DE \cot 30^\circ = \sqrt{3}b$$

$$PE = \frac{DE}{\sin 30^\circ} = 2b, \quad OB = 2OD = \frac{2}{\sqrt{3}}b$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{PD} = \frac{OD \cdot \omega_{OC}}{PD} = \frac{\frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3v}{4b}}{\sqrt{3}b} = \frac{v}{4b} \text{ rad/s} \quad (\text{逆})$$

$$v_E = PE \cdot \omega_{DE} = 2b \cdot \frac{v}{4b} = \frac{1}{2}v \quad (\rightarrow)$$

(2) 加速度分析, 如图 9-29c 所示

① 取套筒 B 为动点, 动系固结于杆 OC , 点 B 的加速度分析如图 9-29c 所示。

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{Be}^n + \mathbf{a}_{Be}^t + \mathbf{a}_{Br} + \mathbf{a}_{BC}, \quad a_B = 0 \quad (1)$$

式(1)向 \mathbf{a}_{BC} 方向投影

$$0 = a_{BC} - a_{Be}^t$$

$$a_{BC} = 2\omega_{OC}v_{Br} = \frac{3v^2}{4b}, \quad a_{Be}^t = OB \cdot \alpha_{OC} = \frac{2b}{\sqrt{3}}\alpha_{OC}$$

$$\alpha_{OC} = \frac{a_{BC}}{OB} = \frac{3\sqrt{3}}{8b^2} v^2 \quad (\text{逆})$$

② 以点 E 为基点, 分析点 D 的加速度, 如图 9-29c 所示。

$$\mathbf{a}_D^t + \mathbf{a}_D^n = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{DE}^t + \mathbf{a}_{DE}^n \quad (2)$$

式(2)向 \mathbf{a}_{DE}^n 方向投影, 得

$$-a_D^t = a_E \cos 30^\circ + a_{DE}^n$$

$$a_D^t = OD \cdot \alpha_{OC} = \frac{3v^2}{8b}, \quad a_{DE}^n = DE \cdot \omega_{DE}^2 = \frac{v^2}{16b}$$

$$a_E = \frac{2}{\sqrt{3}} (-a_D^t - a_{DE}^n) = -\frac{7v^2}{8\sqrt{3}b^2} \quad (\leftarrow)$$

9-30 图 9-30a 中滑块 A 、 B 、 C 以连杆 AB 、 AC 相铰接。滑块 B 、 C 在水平槽中相对运动的速度恒为 $\dot{s} = 1.6 \text{ m/s}$ 。求当 $x = 50 \text{ mm}$ 时, 滑块 B 的速度和加速度。

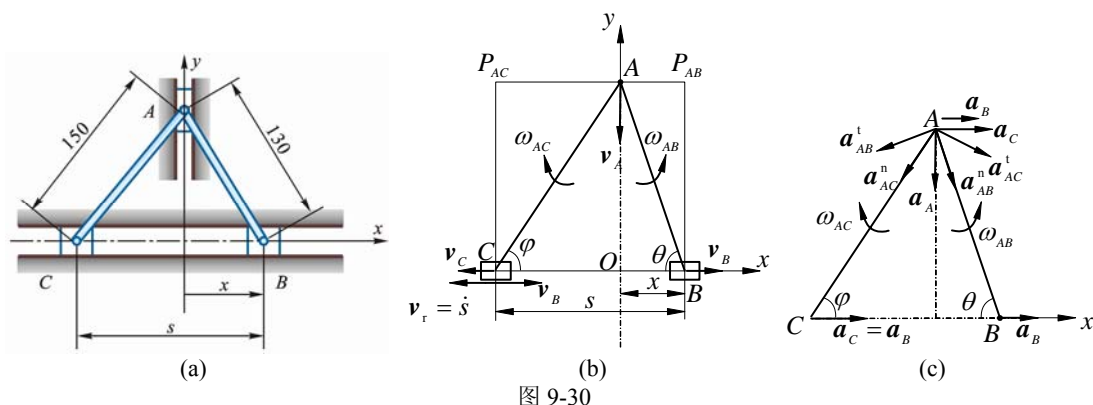


图 9-30

解 (1) AB , BC 作平面运动

$$\textcircled{1} \quad v_B \cos \theta = v_A \sin \theta, \quad v_C \cos \varphi = v_A \sin \varphi, \quad v_B \cot \theta = v_C \cot \varphi$$

$$v_C = v_B \frac{\tan \varphi}{\tan \theta} \quad (1)$$

以块 B 为动系, C 为动点:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_r$$

上式向 \mathbf{v}_C 投影, 得

$$v_C = \dot{s} - v_B$$

代入式(1)得

$$\dot{s} - v_B = v_B \frac{\tan \varphi}{\tan \theta}$$

$$v_B = \frac{\dot{s}}{1 + \frac{\tan \varphi}{\tan \theta}} = \left(\frac{1.6}{1 + \frac{12/9}{12/5}} \right) \text{ m/s} = 1.029 \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{BP_{AB}} = \frac{1.029}{0.12} = 8.575 \text{ rad/s}$$

$$v_C = (1.6 - 1.029) \text{ m/s} = 0.571 \text{ m/s}$$

$$\omega_{AC} = \frac{v_C}{CP_{AC}} = 4.758 \text{ rad/s}$$

② B , C 相对速度 $\dot{s} = 1.6 \text{ m/s}$ 为常量, 故

$$\mathbf{a}_r = 0, \quad \mathbf{a}_c = \mathbf{a}_B \quad (2)$$

以 C 为基点:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{AC}^n + \mathbf{a}_{AC}^t \quad (3)$$

以 B 为基点:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}^n + \mathbf{a}_{AB}^t \quad (4)$$

由式 (3)、(4) 得

$$\mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{AC}^n + \mathbf{a}_{AC}^t = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{AB}^n + \mathbf{a}_{AB}^t \quad (5)$$

式 (2) 代入, 得

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_{AC}^n & + & \mathbf{a}_{AC}^t & = & \mathbf{a}_{AB}^n & + & \mathbf{a}_{AB}^t \\ \text{方向} & \text{沿 } \mathbf{AC} & \perp \mathbf{AC} & & \text{沿 } \mathbf{AB} & \perp \mathbf{AB} \\ \text{大小} & AC \cdot \omega_{AC}^2 & ? & & AC \cdot \omega_{AB}^2 & ? \end{array} \quad (6)$$

式 (6) 向 \mathbf{a}_{AC}^n 投影, 得

$$\begin{aligned} a_{AC}^n &= a_{AB}^n \cos[(\pi - (\varphi + \theta))] + a_{AB}^t \sin[\pi - (\varphi + \theta)] \\ a_{AC}^n &= -a_{AB}^n \cos(\varphi + \theta) + a_{AB}^t \sin(\varphi + \theta) \\ a_{AB}^t &= \frac{a_{AC}^n + a_{AB}^n \cos(\varphi + \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tan \theta = \frac{12}{5}, \quad \theta = 67.38^\circ$$

$$\tan \varphi = \frac{12}{9}, \quad \varphi = 53.13^\circ$$

$$\varphi + \theta = 120.51^\circ$$

代入式 (7) 得

$$\begin{aligned} a_{AB}^t &= \frac{a_{AC}^n + a_{AB}^n \cos 59.49^\circ}{\sin 59.49^\circ} \\ &= \frac{0.15 \times 4.7583^2 - 0.13 \times 8.575^2 \cos 59.49^\circ}{\sin 59.49^\circ} = -1.69 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

式 (4) 向 \mathbf{a}_B 方向投影, 得

$$\begin{aligned} 0 &= a_B + a_{AB}^n \cos \theta - a_{AB}^t \sin \theta \\ a_B &= a_{AB}^t \sin \theta - a_{AB}^n \cos \theta = -1.69 \sin 67.38^\circ - 0.13 \times 8.575^2 \cos 67.38^\circ \\ &= -5.33 \text{ m/s}^2 \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

解 (2) 点的绝对运动法, 如图 9-30a 所示

$$\begin{aligned} 130^2 - x^2 &= y_A^2 = 150^2 - (s - x)^2 \\ s^2 - 2sx - 5600 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$s = x + \sqrt{x^2 + 5600} \quad (\text{只取正根}) \quad (2)$$

由式 (1), 得

$$\begin{aligned} x &= \frac{s^2 - 5600}{2s} \text{ mm} \\ \dot{x} &= \left(\frac{\dot{s}}{2} + \frac{2800}{s^2} \dot{s} \right) \text{ mm/s} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\ddot{s}}{2} + \frac{2800}{s^2} \ddot{s} - \frac{5600}{s^3} \dot{s}^2 \\ \ddot{s} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\ddot{x} = -\frac{5\,600}{s^3}(1\,600)^2 \text{ mm/s}^2$$

当 $x = 50 \text{ mm}$ 时, 由式 (2) 得

$$s = 140 \text{ mm}, \quad \dot{s} = 1\,600 \text{ mm/s}$$

由式 (3), 得

$$\dot{x} = \left(\frac{1\,600}{2} + \frac{2\,800}{140^2} \times 1\,600 \right) \text{ mm/s} = 1\,029 \text{ mm/s} = 1.03 \text{ m/s}$$

由式 (4), 得

$$\ddot{x} = \left[-\frac{5\,600}{140^3} \times (1\,600)^2 \right] \text{ mm/s}^2 = -5\,225 \text{ mm/s}^2 = -5.225 \text{ m/s}^2$$

***9-31** 图 9-31a 所示行星齿轮传动机构中, 曲柄 OA 以匀角速度 ω_O 绕轴 O 转动, 使与齿轮 A 固结在一起的杆 BD 运动。杆 BE 与 BD 在点 B 铰接, 并且杆 BE 在运动时始终通过固定铰支的套筒 C 。如定齿轮的半径为 $2r$, 动齿轮半径为 r , 且 $AB = \sqrt{5}r$ 。如图 9-31b 所示瞬时, 曲柄 OA 在铅直位置, BD 在水平位置, 杆 BE 与水平线间成角 $\varphi = 45^\circ$, 求此时杆 BE 上与 C 相重合点的速度和加速度。

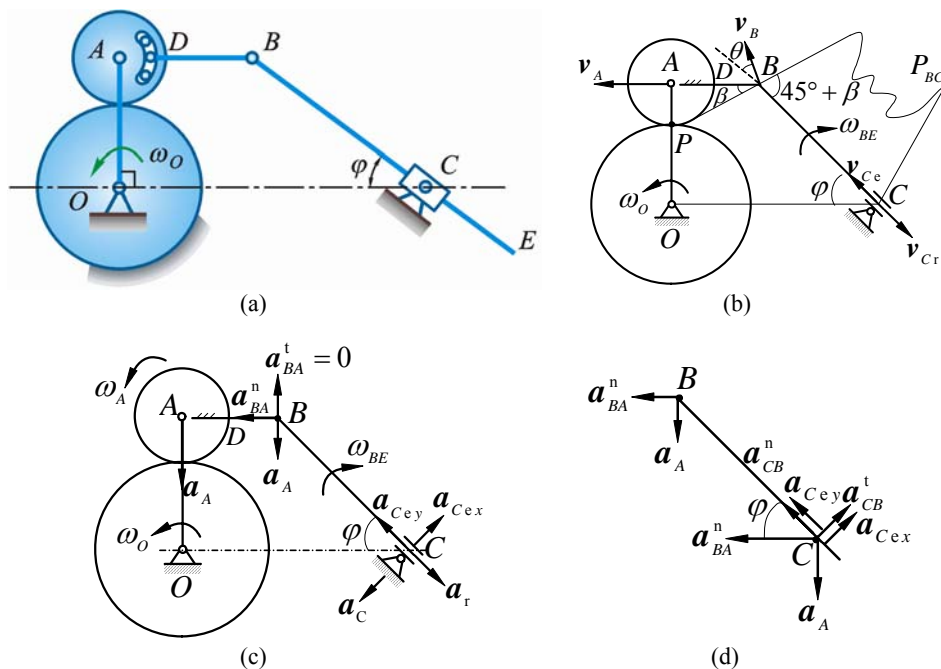


图 9-31

解 轮 A 的瞬心在点 P , 如图 9-31b 所示

$$v_A = 3r\omega_O, \quad \omega_A = \frac{v_A}{r} = 3\omega_O, \quad v_B = PB \cdot \omega_A = 3\sqrt{6}r\omega_O$$

以套筒上点 C 为动点, 动系固结于杆 BE , $v_{Ca} = 0$, 牵连运动为平面运动, 相对运动为直线运动, v_{Cr} 方向如图 9-31b 所示:

$$v_{Ca} = v_{Ce} + v_{Cr} = 0, \quad v_{Ce} = -v_{Cr}$$

BE 上与动点 C 重合点 (牵连点) 的速度方向如图 9-31b 所示。

由速度投影定理得

$$v_{Ce} = v_B \cos \theta$$

$$\theta = 90^\circ - 45^\circ - \beta, \quad \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = 24.095^\circ$$

$$v_{Ce} = v_B \cos(45^\circ - \beta) = 6.865r\omega_O$$

$$\omega_{BE} = \frac{v_{Ce}}{3\sqrt{2}r \tan(45^\circ + \beta)} = \frac{6.865r\omega_o}{3\sqrt{2}r \tan 69.095^\circ} = 0.618\omega_o$$

$$v_{Cr} = 6.865r\omega_o$$

(3) 加速度分析, 如图 9-31c、9-31d 所示

$$a_A = 3r\omega_o^2 \quad (\downarrow)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t \quad (\mathbf{a}_{BA}^t = 0), \quad \mathbf{a}_{BA}^n = \sqrt{5}r\omega_A^2 = 9\sqrt{5}r\omega_o^2$$

以套筒上点 C 为动点, $\mathbf{a}_{Ca} = 0$, BE 为动系, 牵连运动为平面运动, 相对运动为直线运动, 绝对运动静止。

$$\mathbf{a}_{Cex} + \mathbf{a}_{Cey} + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{Ca} = 0$$

由图 9-31c 知,

$$\mathbf{a}_{Cex} = \mathbf{a}_C = 2\omega_{BE}v_{Cr} = 2 \times 0.618\omega_o \times 6.865r\omega_o = 8.486r\omega_o^2$$

以 B 为基点

$$\mathbf{a}_{Cex} + \mathbf{a}_{Cey} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t$$

即

$$\mathbf{a}_{Cex} + \mathbf{a}_{Cey} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t$$

上式向 \mathbf{a}_{CB}^n 投影, 得

$$\begin{aligned} a_{Cey} &= -a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ + a_{CB}^n \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3r\omega_o^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9\sqrt{5}r\omega_o^2 + 3\sqrt{2}r(0.618\omega_o)^2 = 13.73r\omega_o^2 \\ a_{Ce} &= \sqrt{a_{Cey}^2 + a_{Cex}^2} = 16.14r\omega_o^2 \end{aligned}$$

讨论: 上述解法若改为选点 B 为动点, 动系固结于套筒 C , 则牵连运动为定轴转动, 相对运动为直线运动, 绝对运动可根据轮 A 运动求得, 为已知, 求得的套筒的角速度和角加速度即为杆 BE 的角速度和角加速度, 从而以点 B 为基点, 即可求本题待求量, 计算要简便得多, 请读者完成。

***9-32** 在图 9-32a 所示摆动汽缸式蒸汽机中, 曲柄 $OA = 0.12 \text{ m}$, 绕轴 O 匀速转动, 其角速度为 $\omega = 5 \text{ rad/s}$, 汽缸绕轴 O_1 摆动, 连杆 AB 端部的活塞 B 在汽缸内滑动。已知: 距离 $OO_1 = 0.6 \text{ m}$, 连杆 $AB = 0.6 \text{ m}$ 。求当曲柄在 $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 三个位置时活塞的速度。

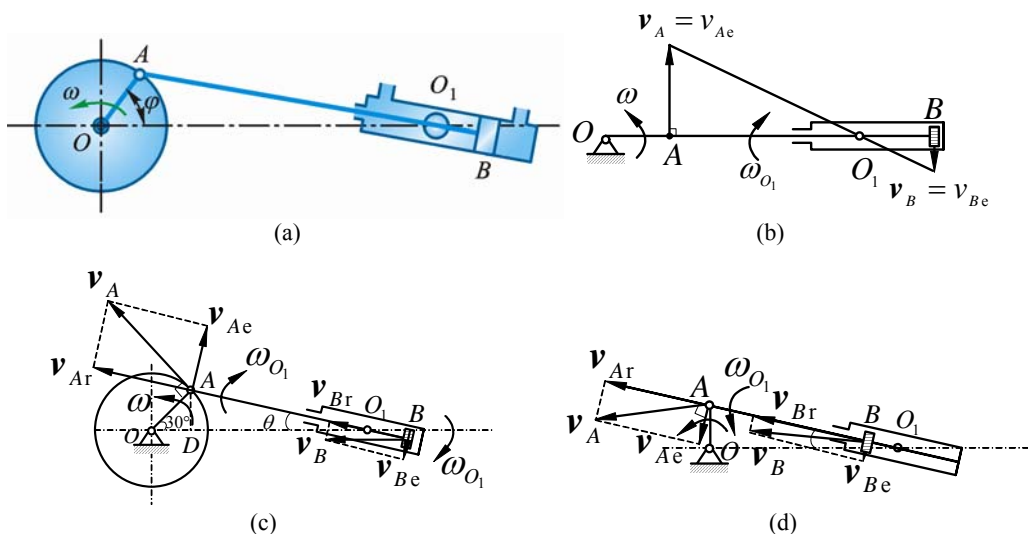


图 9-32

解 动系固结于摆缸 O_1 , 分别以 A, B 为动点, 速度分析如图 9-32b、9-32c、9-32d 所示。

(1) $\varphi = 0^\circ$ 时 (图 9-32b)

注意到 OA 与 AB 位于同 1 水平线, 杆 AB 与摆缸 O_1 间无相对运动。因此

$$v_{Ar} = v_{Br} = 0, \quad v_A = v_{Ae}, \quad v_B = v_{Be}$$

$$v_A = OA \cdot \omega = 0.60 \text{ m/s}, \quad v_{Ae} = O_1A \cdot \omega_{O_1}$$

$$v_{Ae} = v_A = 0.60 \text{ m/s}, \quad O_1A = (0.60 - 0.12) \text{ m} = 0.48 \text{ m}$$

$$\omega_{O_1} = \frac{v_{Ae}}{O_1A} = \frac{0.60}{0.48} = 1.25 \text{ rad/s}$$

$$v_B = v_{Be} = O_1B \cdot \omega_{O_1} = 0.15 \text{ m/s} \quad (\downarrow)$$

(2). $\varphi = 45^\circ$ 时 (图 9-32c)

设点 D 为点 A 在 OO_1 直线上垂足。由几何关系

$$\tan \theta = \frac{AD}{O_1D} = \frac{OA \sin 45^\circ}{OO_1 - OA \cos 45^\circ} = \frac{0.06\sqrt{2}}{0.60 - 0.06\sqrt{2}} = 0.1647, \quad \theta = 9.35^\circ$$

$$O_1A = \sqrt{(O_1D)^2 + (AD)^2} = \left[\sqrt{(0.60 - 0.06\sqrt{2})^2 + (0.06\sqrt{2})^2} \right] \text{ m} = 0.522 \text{ m}$$

$$v_{Ae} = v_A \sin(45^\circ - \theta) = 0.60 \sin 35.65^\circ = 0.3497 \text{ m/s}$$

$$\omega_{O_1} = \frac{v_{Ae}}{O_1A} = 0.670 \text{ rad/s}$$

$$v_{Be} = O_1B \cdot \omega_{O_1} = (AB - O_1A) \omega_{O_1} = 0.05225 \text{ m/s}$$

$$v_{Br} = v_{Ar} = v_A \cos(45^\circ - 9.35^\circ) = 0.60 \cos 35.65^\circ = 0.4875 \text{ m/s}$$

$$v_B = \sqrt{v_{Be}^2 + v_{Br}^2} = \left(\sqrt{0.05225^2 + 0.4875^2} \right) \text{ m/s} = 0.490 \text{ m/s}$$

(3) $\varphi = 90^\circ$ 时 (图 9-32d)

$$O_1A = \sqrt{(OO_1)^2 + (OA)^2} = \left(\sqrt{0.60^2 + 0.12^2} \right) \text{ cm} = 0.12\sqrt{26} \text{ cm} = 0.6119 \text{ m}$$

$$v_{Br} = v_{Ar} = v_A \cos \theta = 0.60 \times \frac{0.60}{0.12\sqrt{26}} = \left(\frac{3.00}{\sqrt{26}} \right) \text{ m/s} = 0.588 \text{ m/s}$$

$$v_{Ae} = v_A \sin \theta = 0.60 \times \frac{0.12}{0.12\sqrt{26}} = \left(\frac{0.60}{\sqrt{26}} \right) \text{ m/s} = 0.1177 \text{ m/s}$$

$$\omega_{O_1} = \frac{v_{Ae}}{O_1A} = \frac{5}{26} = 0.192 \text{ rad/s}$$

$$v_{Be} = (O_1A - AB) \omega_{O_1} = \left[(0.6119 - 0.60) \cdot \frac{5}{26} \right] \text{ m/s} = 2.28 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$v_B = \sqrt{v_{Be}^2 + v_{Br}^2} = \left(\sqrt{0.00228^2 + 0.588^2} \right) \text{ m/s} = 0.588 \text{ m/s}$$

***9-33** 图 9-33a 所示放大机构中, 杆 I 和 II 分别以速度 v_1 和 v_2 沿箭头方向运动, 其位移分别以 x 和 y 表示。如杆 II 与杆 III 平行, 其间距离为 a , 求杆 III 的速度和滑道 IV 的角速度。

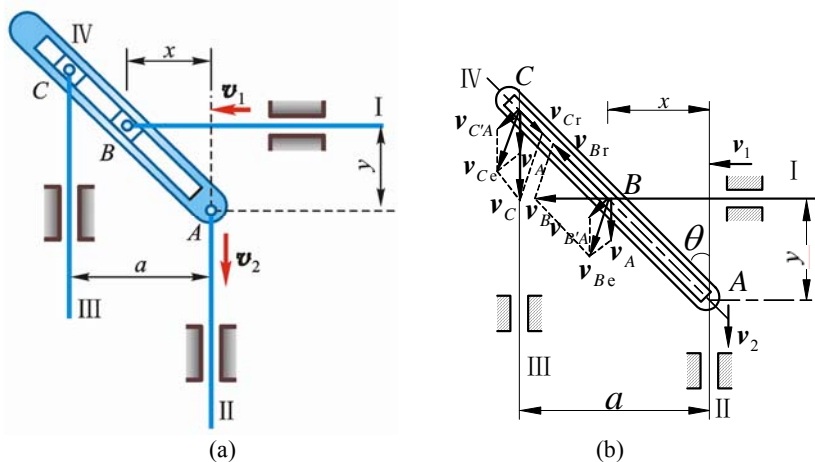


图 9-33

解 (1) 以滑块 B 为动点, 滑道 IV 的动系, 牵连运动为平面运动, 则

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{Be} + \mathbf{v}_{Br}, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_1 \quad (1)$$

其中 \mathbf{v}_{Be} 可由以 A 为基点分析滑道 IV 上与滑块 B 重合点的速度来确定, 即

$$\mathbf{v}_{Be} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B'A}, \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_2 \quad (2)$$

式 (2) 代入式 (1) 得

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{B'A} + \mathbf{v}_{Br} \quad (3)$$

式 (3) 向 $\mathbf{v}_{B'A}$ 方向投影得

$$v_1 \cos \theta = v_2 \sin \theta + v_{B'A} \quad (4)$$

$$v_{B'A} = AB \cdot \omega_4, \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

代入式 (4) 得

$$\omega_4 = \frac{v_1 y - v_2 x}{x^2 + y^2}$$

(2) 以滑块 C 为动点, 滑道 IV 为动系, 则有

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{Ce} + \mathbf{v}_{Cr}, \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_3 \quad (5)$$

其中 \mathbf{v}_{Ce} 可由以 A 为基点分析滑道 IV 上滑块 C 的重合点的速度来确定, 即

$$\mathbf{v}_{Ce} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{C'A}, \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_2 \quad (6)$$

式 (6) 代入式 (5) 得

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{C'A} + \mathbf{v}_{Cr} \quad (7)$$

式 (7) 向 $\mathbf{v}_{C'A}$ 方向投影, 得

$$v_3 \sin \theta = v_2 \sin \theta + v_{C'A} \quad (8)$$

$$v_{C'A} = CA \omega_4, \quad CA = \frac{a}{\sin \theta} \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (8) 得

$$v_3 = v_2 + \frac{a \omega_4}{\sin^2 \theta} = v_1 \frac{ay}{x^2} - v_2 \frac{a-x}{x}$$

***9-34** 半径 $R=0.2$ m 的 2 个相同的大环沿地面向相反方向无滑动地滚动, 环心的速度为常数; $v_A = 0.1$ m/s。 $v_B = 0.4$ m/s。当 $\angle MAB = 30^\circ$ 时, 求套在这 2 个大环上的小环 M 相对于每个大环的速度和加速度, 以及小环 M 的绝对速度和绝对加速度。

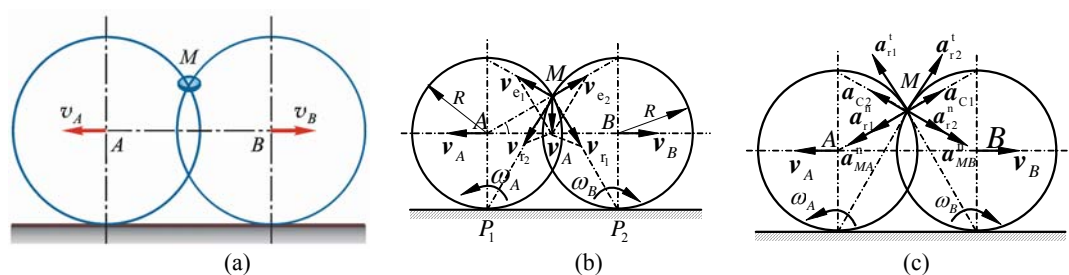


图 9-34

解 (1) 运动分析 ($\theta = 30^\circ$)

小环 M 为动点，动系分别固结于大环 A 和 B ；绝对运动为平面曲线，相对运动为沿圆环圆周运动，牵连运动均为平面运动。

(2) 速度分析，如图 9-34b 所示

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{v}_a & = & \mathbf{v}_{e1} & + & \mathbf{v}_{r1} & = & \mathbf{v}_{e2} & + & \mathbf{v}_{r2} & (1) \\ \text{方向} & ? & \perp MP_1 & \perp MA & \perp MP_2 & \perp MB & & & & \\ \text{大小} & ? & \checkmark & ? & \checkmark & ? & & & & \end{array}$$

式 (1) 向 \overrightarrow{MA} 方向投影，得

$$\begin{aligned} v_{e1} \cos 60^\circ &= -v_{e2} + v_{r2} \cos 30^\circ \\ v_{r2} &= \frac{\frac{1}{2}v_{e1} + v_{e2}}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}v_A + \sqrt{3}v_B}{\sqrt{3}/2} = v_A + 2v_B = 0.9 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (2)$$

$$v_{e1} = \sqrt{3}v_A, \quad v_{e2} = \sqrt{3}v_B$$

式 (1) 向 \overrightarrow{MB} 方向投影，得

$$\begin{aligned} -v_{e1} + v_{r1} \cos 30^\circ &= v_{e2} \cos 60^\circ \\ v_{r1} &= \frac{\frac{1}{2}v_{e2} + v_{e1}}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}v_B + \sqrt{3}v_A}{\sqrt{3}/2} = v_B + 2v_A = 0.6 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{v_{e1}^2 + v_{r1}^2 - 2v_{e1}v_{r1} \cos 30^\circ} = \sqrt{3v_A^2 + v_{r1}^2 - 2\sqrt{3}v_A \cdot v_{r1} \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \left(\sqrt{3 \times 0.01 + 0.6^2 - 3 \times 0.1 \times 0.6} \right) \text{ m/s} = 0.458 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (4)$$

(3) 加速度分析，如图 9-34c 所示

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{r1}^n + \mathbf{a}_{r1}^t + \mathbf{a}_{C1} = \mathbf{a}_{e2} + \mathbf{a}_{r2}^n + \mathbf{a}_{r2}^t + \mathbf{a}_{C2} \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_{e1} = \mathbf{a}_{MA}^n, \quad \mathbf{a}_{e2} = \mathbf{a}_{MB}^n$$

即

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{a}_{MA}^n + \mathbf{a}_{r1}^n + \mathbf{a}_{r1}^t + \mathbf{a}_{C1} & = & \mathbf{a}_{MB}^n + \mathbf{a}_{r2}^n + \mathbf{a}_{r2}^t + \mathbf{a}_{C2} & (6) \\ \text{方向} & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \\ \text{大小} & \checkmark & \checkmark & ? & \checkmark & \checkmark & \checkmark & ? & \checkmark & \checkmark & \end{array}$$

$$\omega_A = \frac{v_A}{R} = 0.5 \text{ rad/s}, \quad \omega_B = \frac{v_B}{R} = 2 \text{ rad/s}$$

$$a_{MA}^n = R\omega_A^2 = (0.2 \times 0.5^2) \text{ m/s}^2 = 0.05 \text{ m/s}^2$$

$$a_{C1} = 2\omega_A v_{r1} = (2 \times 0.5 \times 0.6) \text{ m/s}^2 = 0.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_{MB}^n = R\omega_B^2 = (0.2 \times 2^2) \text{ m/s}^2 = 0.8 \text{ m/s}^2$$

$$a_{C2} = 2\omega_B v_{r2} = 2 \times 2 \times 0.9 \text{ m/s}^2 = 3.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_{r1}^n = \frac{v_{r1}^2}{R} = \left(\frac{0.6^2}{0.2} \right) \text{m/s}^2 = 1.8 \text{m/s}^2$$

$$a_{r2}^n = \frac{v_{r2}^2}{R} = \left(\frac{0.9^2}{0.2} \right) \text{m/s}^2 = 4.05 \text{m/s}^2$$

式 (6) 向 a_{MA}^n 方向投影, 得

$$\begin{aligned} a_{MA}^n + a_{r1}^n - a_{C1} &= -a_{MB}^n \cos 60^\circ - a_{r2}^n \cos 60^\circ - a_{r2}^t \cos 30^\circ + a_{C2} \cos 60^\circ \\ a_{r2}^t &= \frac{2}{\sqrt{3}} (a_{C1} + \frac{1}{2} a_{C2} - a_{MA}^n - a_{r1}^n - \frac{1}{2} a_{MB}^n - \frac{1}{2} a_{r2}^n) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} (2a_{C1} + a_{C2} - 2a_{MA}^n - 2a_{r1}^n - a_{MB}^n - a_{r2}^n) \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{3} (2 \times 0.6 + 3.6 - 2 \times 0.05 - 2 \times 1.8 - 0.8 - 4.05) \right] \text{m/s}^2 = -2.165 \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

式 (6) 向 a_{r1}^t 方向投影, 得

$$\begin{aligned} a_{r1}^t &= -a_{MB}^n \cos 30^\circ - a_{r2}^n \cos 30^\circ + a_{r2}^t \cos 60^\circ + a_{C2} \cos 30^\circ \\ &= \left(-0.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4.05 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2.165 \times \frac{1}{2} + 3.6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{m/s}^2 = -2.165 \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

$$a_{r1} = \sqrt{(a_{r1}^t)^2 + (a_{r1}^n)^2} = \left(\sqrt{2.165^2 + 1.8^2} \right) \text{m/s}^2 = 2.816 \text{m/s}^2$$

$$a_{r2} = \sqrt{(a_{r2}^t)^2 + (a_{r2}^n)^2} = \left(\sqrt{2.165^2 + 4.05^2} \right) \text{m/s}^2 = 4.592 \text{m/s}^2$$

$$a_M = \sqrt{(a_{MA}^n + a_{r1}^n - a_{C1})^2 + (a_{r1}^t)^2} = \left(\sqrt{(0.05 + 1.8 - 0.6)^2 + 2.165^2} \right) \text{m/s}^2 = 2.5 \text{m/s}^2$$

验算:

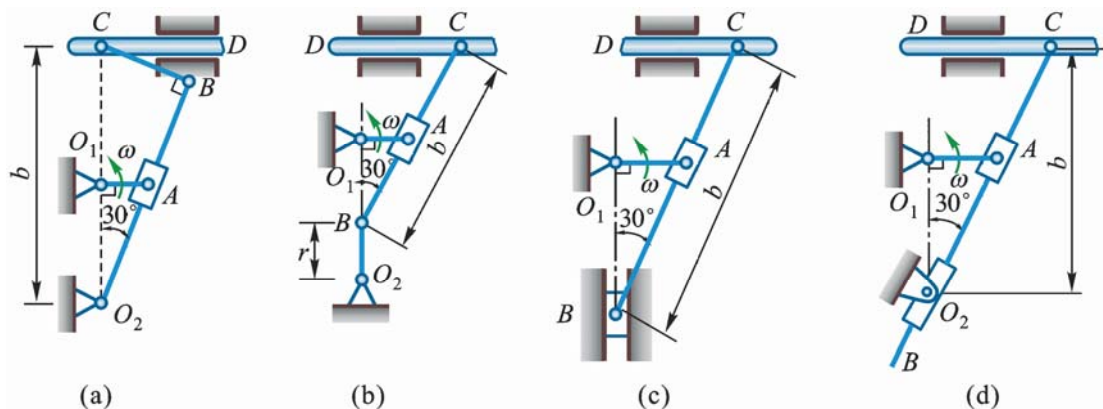
$$a_M = \sqrt{(a_{MB}^n + a_{r2}^n - a_{C2})^2 + (a_{r2}^t)^2} = \left(\sqrt{(0.8 + 4.05 - 3.6)^2 + 2.165^2} \right) \text{m/s}^2 = 2.5 \text{m/s}^2$$

***9-35** 图 9-35a、9-35b、9-35c、9-35d 所示 4 种刨床机构, 已知曲柄 $O_1A = r$, 以匀角速度 ω 转动, $b = 4r$ 。求在图 9-35a、9-35b、9-35c、9-35d 所示位置时, 滑枕 CD 平移的速度。

(a) 解 设杆 O_2B 角速度为 ω'

(1) 以滑块 A 为动点、动系固结于杆 O_2B , 速度分析如图 9-35a1。

$$v_A = r\omega, \quad v_{Ae} = \omega' \cdot O_2A$$



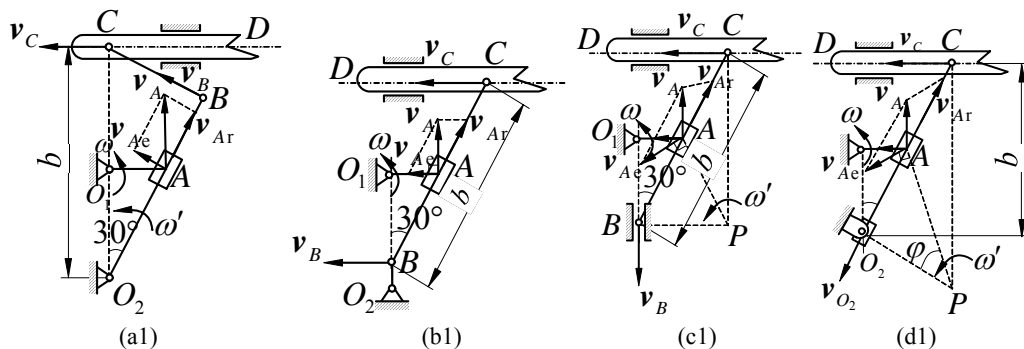


图 9-35

$$v_{Ae} = v_A \sin 30^\circ, \quad \omega' = \frac{v_{Ae}}{O_2A} = \frac{v_A \sin 30^\circ}{O_2A} = \frac{1}{4} \omega$$

$$v_B = O_2B \cdot \omega' = b \cos 30^\circ \cdot \frac{\omega}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8} b \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega r$$

(2) 杆 BC 作平面运动, 由速度投影定理得

$$v_C \cos 30^\circ = v_B, \quad v_{CD} = v_C = \frac{v_B}{\cos 30^\circ} = r \omega \quad (\leftarrow)$$

(b) 解 杆 BC 上 B、C 两点速度均沿水平方向, 所以杆 BC 在图示位置作瞬时平移, 即 $v_B = v_C$

以滑块 A 为动点, 动系固结于杆 BC, 速度分析如图 9-35b1 所示:

$$v_A = r \omega, \quad v_{Ae} = v_A \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} r \omega$$

$$v_{CD} = v_C = v_{Ae} = \frac{\sqrt{3}}{3} r \omega \quad (\leftarrow)$$

(c) 解 设杆 BC 角速度为 ω' , 杆 BC 的速度瞬心在点 P, 如图 9-35c1 所示。

$$BP = b \sin 30^\circ = 2r \cdot AB = \frac{OA}{\sin 30^\circ} = 2r$$

$AP = 2r$ (滑块 A 在杆 BC 上的重合点为 BC 的中点)

故得

$$\frac{v_C}{PC} = \frac{v_{Ae}}{PA}, \quad v_C = \frac{PC}{PA} v_{Ae} = \frac{4r \cos 30^\circ}{2r} v_{Ae} = \sqrt{3} v_{Ae} \quad (1)$$

以滑块 A 为动点, 动系固结于杆 BC, 速度分析如图 9-35c1, 由图 9-35c1, v_A 与 v_{Ar} 间夹角为 30° , v_{Ae} 与 v_{Ar} 间夹角为 150° , v_{Ae} 与 v_A 间夹角为 120° , 所以

$$v_{Ae} = v_A = r \omega$$

把 v_{Ae} 值代入式 (1) 得

$$v_{CD} = v_C = \sqrt{3} r \omega \quad (\leftarrow)$$

(d) 解 杆 O_2C 在图示位置的速度瞬心在点 P, 如图 9-35c d1, 设其角速度为 ω' 。

$$PC = \frac{O_2C}{\cos 30^\circ} = \frac{b}{\cos 30^\circ} = \frac{16}{3} r, \quad O_2P = PC \sin 30^\circ = \frac{8}{3} r, \quad AO_2 = 2r$$

$$PA = \sqrt{(AO_2)^2 + (PO_2)^2} = \frac{10}{3} r$$

则有

$$\frac{v_C}{PC} = \frac{v_{Ae}}{PA}, \quad v_C = \frac{PC}{PA} v_{Ae} = \frac{8}{5} v_{Ae}$$

以滑块 A 为动点，动系固结于 O_2C ，速度分析如图 9-35c d1:

$$\frac{v_A}{\sin \varphi} = \frac{v_{Ae}}{\sin 30^\circ}, \quad \sin \varphi = \frac{AO_2}{PA} = \frac{2r}{10r} = \frac{3}{5}$$

$$v_{Ae} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin \varphi} v_A = \frac{5}{6} v_A$$

代入式 (1) 得

$$v_{CD} = v_C = \frac{8}{5} \times \frac{5}{6} v_A = \frac{4}{3} r\omega \quad (\leftarrow)$$

***9-36** 求上题各图中滑枕 CD 平移的加速度。

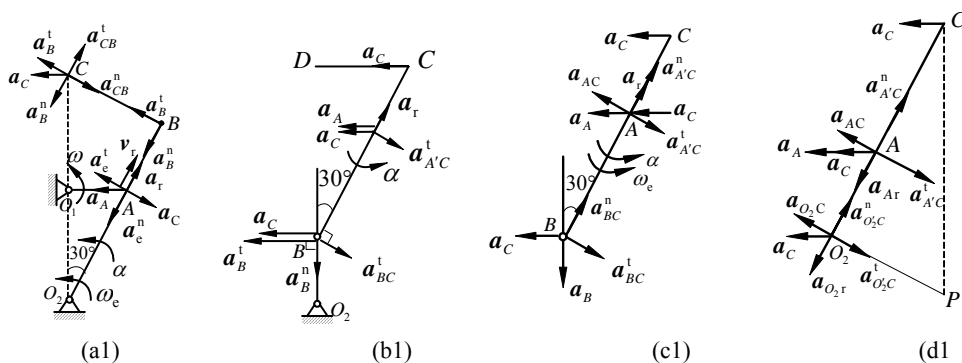


图 9-36

(a) 解 由图 9-35a 结果知

$$\omega_e = \frac{1}{4} \omega, \quad v_r = v_A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega$$

$$a_A = r\omega^2, \quad a_C = 2\omega_e v_r = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega^2, \quad a_e^n = 2\omega_e^2 = \frac{1}{8} r\omega^2$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (1)$$

上式向 \mathbf{a}_e^t 方向投影，得

$$a_A \cos 30^\circ = a_e^t + a_C, \quad a_e^t = a_A \cos 30^\circ - a_C = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega^2, \quad \alpha = \frac{a_e^t}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega^2$$

$$a_B^n = O_1B \cdot \omega_e^2 = 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{4} \omega\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} r\omega^2, \quad a_B^t = 2\sqrt{3}r \cdot \alpha = \frac{3}{4} r\omega^2$$

BC 作平面运动，以 B 为基点

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t \quad (2)$$

由图 9-35a \mathbf{v}_B 、 \mathbf{v}_C 方向知

$$\omega_{BC} = \omega_e = \frac{\omega}{4}, \quad a_{CB}^n = 2r \cdot \omega_{CB}^2 = \frac{1}{8} r\omega^2$$

式 (2) 向 \mathbf{a}_B^t 方向投影，得

$$a_C \cos 30^\circ = a_B^t - a_{CB}^n, \quad a_{CD} = a_C = \frac{a_B^t - a_{CB}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{12} r\omega^2 \quad (\leftarrow)$$

(b) 解 由图 9-35b 结果知

$$\omega_{BC} = 0 \quad v_B = v_C = \frac{\sqrt{3}}{3} r \omega, \quad a_B^n = \frac{v_B^2}{r} = \frac{1}{3} r \omega^2$$

以 C 为基点: $\mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{BC}^t$

上式向 \mathbf{a}_B^n 方向投影, 得

$$a_B^n = a_{BC}^t \cos 60^\circ, \quad a_{BC}^t = 2a_B^n = \frac{2}{3} r \omega^2, \quad \alpha = \frac{a_{BC}^t}{4r} = \frac{1}{6} r \omega^2$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r \quad (\mathbf{a}_C = 0), \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A'C}^t$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A'C}^t + \mathbf{a}_r \quad (1)$$

$$a_{A'C}^t = 2r\alpha = \frac{1}{3} r \omega^2, \quad a_A = r \omega^2$$

式 (1) 向 $\mathbf{a}_{A'C}^t$ 方向投影, 得

$$-a_A \cos 30^\circ = -a_C \cos 30^\circ + a_{A'C}^t$$

$$a_C = a_A + \frac{a_{A'C}^t}{\cos 30^\circ} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} + 1\right) r \omega^2 \quad (\leftarrow)$$

(c) 解 由图 9-35c 结果知

$$\omega_e = \frac{v_{Ae}}{2r} = \frac{v_A}{2r} = \frac{\omega}{2}$$

以 C 为基点:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{BC}^n + \mathbf{a}_{BC}^t$$

上式向 \mathbf{a}_C 方向投影, 得

$$0 = a_C - a_{BC}^n \cos 60^\circ - a_{BC}^t \cos 30^\circ$$

$$a_C = \frac{1}{2} a_{BC}^n + \frac{\sqrt{3}}{2} a_{BC}^t \quad (1)$$

又以 A 为动点, CB 为动系:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C, \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A'C}^n + \mathbf{a}_{A'C}^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C \quad (2)$$

$$a_{BC}^t = 2a_{A'C}^t \quad (3)$$

式 (2) 向 \mathbf{a}_C 方向投影, 得

$$a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 30^\circ - a_{A'C}^t + a_C$$

$$a_{A'C}^t = a_C \cos 30^\circ + a_C - a_A \cos 30^\circ \quad (4)$$

式 (3)、(4) 代入式 (1), 得

$$a_C = \frac{1}{2} a_{BC}^n + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2(a_C \cos 30^\circ + a_C - a_A \cos 30^\circ)$$

$$a_C = \frac{1}{2} a_{BC}^n + \frac{3}{2} a_C + \sqrt{3} a_C - \frac{3}{2} a_A$$

$$a_C = 3a_A - a_{BC}^n - 2\sqrt{3} a_C \quad (5)$$

$$a_A = r \omega^2, \quad a_{BC}^n = 4r \omega_e^2 = r \omega^2, \quad a_C = 2\omega_e v_r = 2 \frac{\omega}{2} \sqrt{3} r \omega = \sqrt{3} r \omega^2$$

代入式 (5), 得

$$a_C = 3r \omega^2 - r \omega^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} r \omega^2 = -4r \omega^2 \quad (\rightarrow)$$

(d) 解 由图 9-35d 结果知

$$\omega_e = \frac{1}{4}\omega, \quad v_{Ar} = \frac{4+3\sqrt{3}}{6}r\omega, \quad v_{O_2r} = \frac{2}{3}r\omega \quad (v_{O_2} = 0)$$

(1) O_1A 上点 A 为动点，动系固结于杆 BC （平面运动），如图 9-36d1 所示

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{Ae} + \mathbf{a}_{Ar} + \mathbf{a}_{AC}$$

$$\mathbf{a}_{Ae} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A'C}^n + \mathbf{a}_{A'C}^t \quad (\text{以 } C \text{ 为基点})$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A'C}^n + \mathbf{a}_{A'C}^t + \mathbf{a}_{Ar} + \mathbf{a}_{AC}$$

向 \mathbf{a}_{AC} 方向投影，得

$$a_A \cos 30^\circ - a_{A'C}^t + a_{AC} \quad (1)$$

(2) O_2 为动点，静止，动系固结于 BC 。

$$\mathbf{a}_{O_2} = 0, \quad \mathbf{a}_{O_2} = \mathbf{a}_{O_2e} + \mathbf{a}_{O_2r} + \mathbf{a}_{O_2C}, \quad \mathbf{a}_{O_2e} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{O_2'C}^n + \mathbf{a}_{O_2'C}^t$$

$$0 = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{O_2'C}^n + \mathbf{a}_{O_2'C}^t + \mathbf{a}_{O_2'r} + \mathbf{a}_{O_2C}$$

向 \mathbf{a}_{O_2C} 投影，得

$$0 = a_C \cos 30^\circ - a_{O_2'C}^t + a_{O_2C} \quad (2)$$

式 (1) — 式 (2)，得

$$a_A \cos 30^\circ = a_{AC} - a_{A'C}^t + a_{O_2'C}^t - a_{O_2C} \quad (3)$$

$$O_2C = \frac{4r}{\cos 30^\circ}, \quad AC = \frac{4r}{\cos 30^\circ} - 2r$$

$$\frac{AC}{O_2C} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad a_{A'C}^t = (1 - \frac{\sqrt{3}}{4})a_{O_2'C}^t$$

将上式代入式 (3) 得

$$a_A \cos 30^\circ = a_{AC} + \frac{\sqrt{3}}{4}a_{O_2'C}^t - a_{O_2C}, \quad a_A = r\omega^2 \quad (4)$$

式 (2)、(4) 联立，解得

$$a_C = \frac{1}{\cos 30^\circ}[-a_{O_2C} + \frac{4}{\sqrt{3}}a_A(\cos 30^\circ + a_{O_2C} - a_{AC})] \quad (5)$$

$$a_{AC} = 2\omega_e v_{Ar} = 2 \times \frac{\omega}{4} \times \frac{4+3\sqrt{3}}{6}r\omega = \frac{4+3\sqrt{3}}{6}r\omega^2$$

$$a_{O_2C} = 2\omega_e v_{O_2r} = 2 \times \frac{\omega}{4} \times \frac{2}{3}r\omega = \frac{1}{3}r\omega^2$$

将上式代入式 (5)，得

$$a_C = \frac{4\sqrt{3}}{9}r\omega^2 \quad (\leftarrow)$$

第 10 章 质点动力学的基本方程

10-1 质量为 m 的物体放在匀速转动的水平转台上，它与转轴的距离为 r ，如图 10-1a 所示。设物体与转台表面的摩擦因数为 f ，求当物体不致因转台旋转而滑出时，水平台的最大转速。

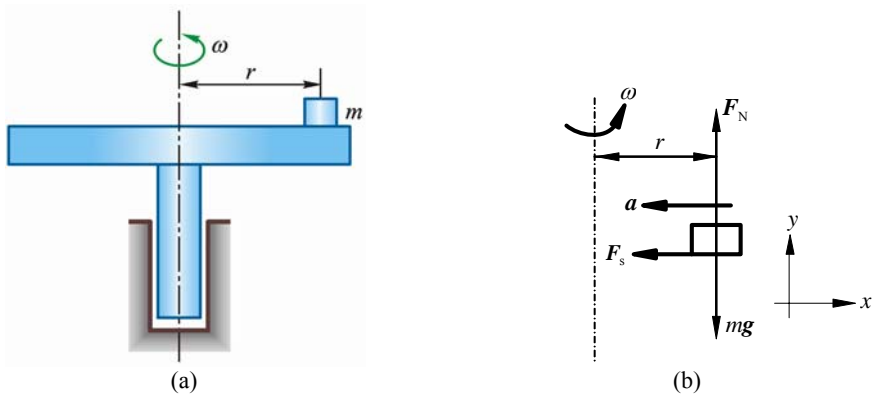


图 10-1

解 物体 m 为研究对象，受力和运动分析如图 10-1b 所示，当转速达最大时，摩擦力达最大：

$$F = fF_N \quad (1)$$

将 $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 分别向 x 和 y 方向投影得

$$-F = -ma, \text{ 其中 } a = r\omega_{\max}^2 \quad (2)$$

$$F_N - mg = 0 \quad (3)$$

式 (1)、(2)、(3) 联立，解得

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{fg}{r}}$$

最大转速

$$n_{\max} = \frac{30}{\pi} \omega_{\max} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{fg}{r}} \text{ r/min}$$

10-2 如图 10-2a 所示 A 、 B 两物体的质量分别为 m_1 与 m_2 ，2 者间用 1 绳子连接，此绳跨过 1 滑轮，滑轮半径为 r 。如在开始时，2 物体的高度差为 h ，而且 $m_1 > m_2$ ，不计滑轮质量。求由静止释放后，2 物体达到相同的高度时所需的时间。

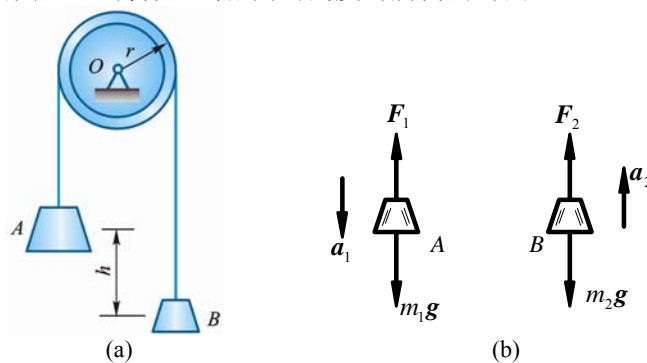


图 10-2

解 分别取重物 m_1 ， m_2 为研究对象，受力和运动分析如图 b，分别列出两物体在铅垂方向的运动微分方程

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_1 \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = F_2 - m_2 g \quad (2)$$

$$a_1 = a_2 = a$$

不计滑轮质量，故

$$F_1 = F_2$$

由式 (1)、(2)，解得

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

a 为常量，2 物体以相等的加速度反向作匀加速运动，且由静止释放，即

$$v_0 = 0$$

$$s_1 = s_2 = s = \frac{1}{2} at^2$$

当 2 物体达到相同高度时，每物体均经过 $s_1 = s_2 = \frac{h}{2}$ 的路程。

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{h(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}}$$

10-3 半径为 R 的偏心轮绕轴 O 以匀角速度 ω 转动，推动导板沿铅直轨道运动，如图 10-3a 所示。导板顶部放有 1 质量为 m 的物块 A ，设偏心距 $OC = e$ ，开始时 OC 沿水平线。求：(1) 物块对导板的最大压力；(2) 使物块不离开导板的 ω 最大值。

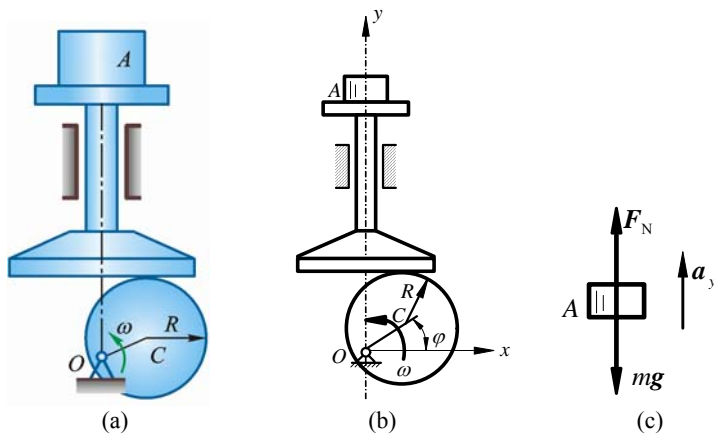


图 10-3

解 建立如图 10-3b 所示直角坐标系 Oxy ，导板与物块均沿 y 轴线作直线运动，导板作平移，其运动规律为

$$y = R + e \sin \omega t$$

对时间求 2 阶导数得

$$a_y = -e\omega^2 \sin \omega t$$

物块 A 受重力 mg 和导板的约束力 F_N 作用如图 10-3c。物块对导板的压力与 F_N 等值、反向、共线。由图 10-3c 得物块 A 的运动微分方程在 y 轴的投影式为

$$F_N - mg = ma_y$$

$$F_N = m(g - e\omega^2 \sin \omega t)$$

(1) 物块对导板的最大压力为

$$F_{N \max} = m(g + e\omega^2)$$

(2) 要使物块不离开导板，则应有

$$F_{N \min} = m(g - e\omega^2) \geq 0$$

即

$$g \geq e\omega^2$$

故

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{e}}$$

10-4 在图 10-4a 所示离心浇注装置中, 电动机带动支承轮 A、B 作同向转动, 管模放在两轮上靠摩擦传动而旋转。铁水浇入后, 将均匀地紧贴管模的内壁而自动成型, 从而可得到质量密实的管形铸件。如已知管模内径 $D = 400 \text{ mm}$, 求管模的最低转速 n 。

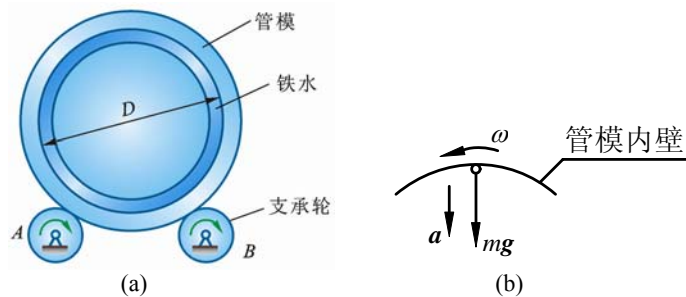


图 10-4

解 取铁水为研究对象, 当管模达到最低转速 n 时, 处于最高位置处的铁水, 只受重力 mg 作用, 而能保持紧贴管壁作圆周运动。运用质点运动微分方程在铅垂方向的投影式, 得

$$mg = ma \quad (1)$$

其中 a 为法向加速度:

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 \cdot \frac{D}{2}$$

代入式 (1) 得

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{D}} = 67 \text{ r/min}$$

10-5 如图 10-5 所示, 为了使列车对铁轨的压力垂直于路基, 在铁道弯曲部分, 外轨要比内轨稍为提高。试就以下的数据求外轨高于内轨的高度 h 。轨道的曲率半径为 $\rho = 300 \text{ m}$, 列车的速度为 $v = 12 \text{ m/s}$, 内、外轨道间的距离为 $b = 1.6 \text{ m}$ 。

解 取列车为研究对象, 设其质量为 m , 列车受重力 mg , 轨道约束力 F_N 作用, 其质心受力和加速度分析如图 10-5 所示。将

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

分别向 x 和 y 方向投影, 得

$$-F_N \sin \theta = -ma \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

$$\text{且} \quad a = \frac{v^2}{\rho} \quad (3)$$

由几何关系知

$$\tan \theta = \frac{h}{\sqrt{b^2 - h^2}} \quad (4)$$

代入已知数据解得

$$h = \frac{v^2 b}{\sqrt{(g\rho)^2 + v^4}} = 78.4 \text{ mm}$$

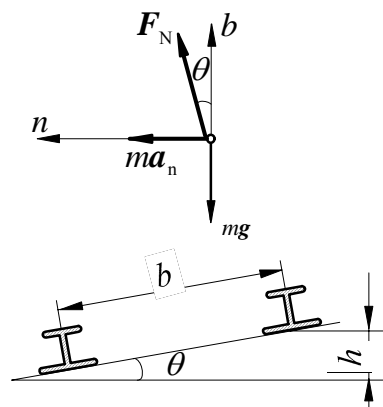


图 10-5

10-6 如图 10-6a 所示套管 A 的质量为 m , 受绳子牵引沿铅直杆向上滑动。绳子的另一端绕过离杆距离为 l 的滑车 B 而缠在鼓轮上。当鼓轮转动时, 其边缘上各点的速度大小为 v_0 。求绳子拉力与距离 x 之间的关系。

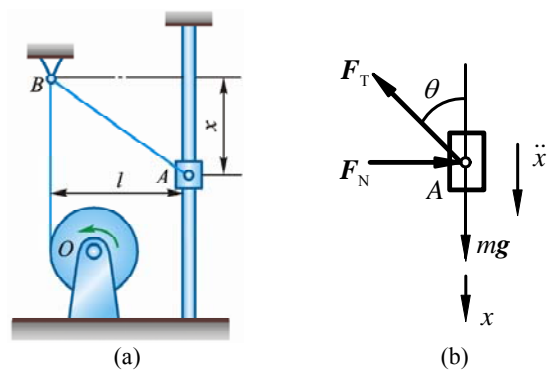


图 10-6

解 取套管 A 为研究对象，A 受重力 mg ，绳子拉力 F_T 以及直杆对它的水平约束力 F_N 作用，如图 10-6b 所示，套管 A 沿着直杆向上作变速直线运动，在任意瞬时 t 有

$$\overline{AB} = \sqrt{l^2 + x^2}$$

上式两边对时间 t 求导

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = -v_0, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{v_0}{x} \sqrt{l^2 + x^2}$$

上式再对时间 t 求导，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\frac{v_0^2 x^2}{\sqrt{l^2 + x^2}} \frac{dx}{dt} - v_0 \sqrt{l^2 + x^2} \frac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{-v_0^2 l^2}{x^3}$$

将质点动力学基本方程向铅直方向投影，得

$$mg - F_T \cos \theta = m\ddot{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

$$F_T = m \left(g + \frac{v_0^2 l^2}{x^3} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{l}{x} \right)^2}$$

10-7 销钉 M 的质量为 0.2 kg ，水平槽杆带动，使其在半径为 $r = 200 \text{ mm}$ 的固定半圆槽内运动。设水平槽杆以匀速 $v = 400 \text{ mm/s}$ 向上运动，不计摩擦。求在图 10-7a 所示位置时圆槽对销钉 M 的作用力。

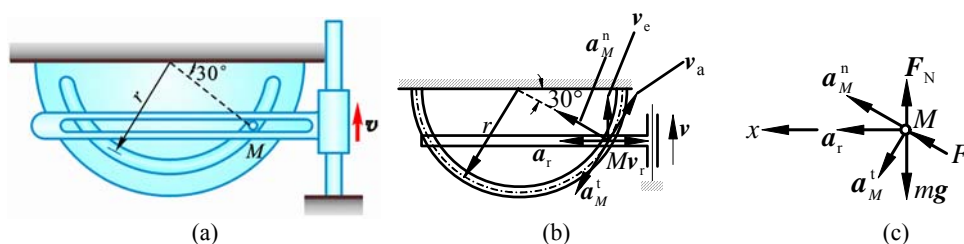


图 10-7

解 以水平槽为动系，速度分析如图 10-7b 所示：

$$v_e = v, \quad v_a = \frac{v_e}{\cos 30^\circ} = \frac{v}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{0.4 \times 2}{\sqrt{3}}$$

受力与加速度分析如图 10-7c 所示：

$$a_M^n = \frac{v_a^2}{r} = \frac{v^2}{r \cdot \frac{3}{4}} = \left(\frac{0.4^2 \times 4}{0.2 \times 3} \right) \text{m/s}^2 = 1.07 \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_M^n + \mathbf{a}_M^t = \mathbf{a}_r$$

向铅直方向投影，得

$$a_M^n \sin 30^\circ - a_M^t \cos 30^\circ = 0, \quad a_M^t = \frac{a_M^n}{\sqrt{3}} = 0.616 \text{ m/s}^2$$

$$a_{Mx} = a_M^n \cos 30^\circ + a_M^t \sin 30^\circ = (0.9238 + 0.3079) \text{ m/s}^2 = 1.23 \text{ m/s}^2$$

设水平槽对 M 的约束力为 F_N ，圆槽对 M 的约束力为 F ，则

$$F \cos 30^\circ = ma_{Mx}$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} ma_{Mx} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times 0.2 \times 1.232 \right) \text{ N} = 0.284 \text{ N}$$

***10-8** 质量皆为 m 的 A 、 B 两物块以无重杆光滑铰接，置于光滑的水平面及铅垂面上，如图 10-8a 所示。当 $\theta = 60^\circ$ 时自由释放，求此瞬时杆 AB 所受的力。

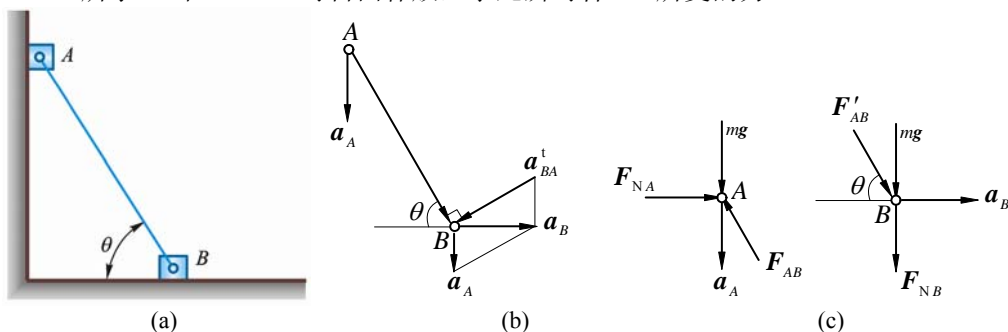


图 10-8

解 初瞬时杆 AB 角速度为零，作平面运动，由图 10-8b 所示，用基点法得：

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t \quad (\mathbf{a}_{BA}^n = 0)$$

$$a_B = a_A \tan \theta = \sqrt{3} a_A \quad (1)$$

由图 10-8c 得：

$$ma_A = mg - F_{AB} \sin \theta \quad (2)$$

$$ma_B = F_{AB} \cos \theta \quad (3)$$

式 (1) 代入式 (3)，得

$$\sqrt{3} ma_A = F_{AB} \cos \theta \quad (4)$$

式 (2)、(4) 联立，解得 ($\theta = 60^\circ$)

$$F_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} mg$$

10-9 铅垂发射的火箭由 1 雷达跟踪，如图 10-9 所示。当 $r = 10\,000 \text{ m}$ ， $\theta = 60^\circ$ ， $\dot{\theta} = 0.02 \text{ rad/s}$ ，且 $\ddot{\theta} = 0.003 \text{ rad/s}^2$ 时，火箭的质量为 $5\,000 \text{ kg}$ 。求此时的喷射反推力 F 。

解 此题为已知运动求力。

用极坐标与直角坐标系描述火箭的运动变换关系：

$$y = r \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r \cos \theta \ddot{\theta} - r \sin \theta \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

约束条件：

$$x = r \cos \theta = 5\,000 \text{ m} \quad (\text{常数})$$

故

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0, \quad \dot{r} = r \tan \theta \cdot \dot{\theta} \quad (2)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r \cos \theta \ddot{\theta} - r \sin \theta \dot{\theta}^2 = 0$$

$$\ddot{r} = 2 \tan \theta \cdot \dot{r}\dot{\theta} + r \dot{\theta}^2 + r \tan \theta \cdot \ddot{\theta} \quad (3)$$

由已知，

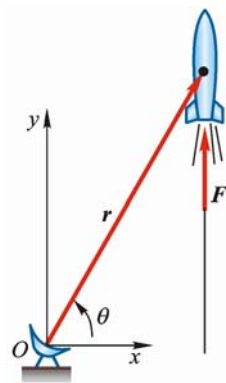


图 10-9

$$r = 10\,000\text{ m}, \theta = 60^\circ \text{ 时}, \dot{\theta} = 0.02\text{ rad/s}, \ddot{\theta} = 0.003\text{ rad/s}^2$$

将上述数值代入式(2)得

$$\dot{r} = (10\,000 \times \sqrt{3} \times 0.02)\text{ m/s} = 346.4\text{ m/s} \quad (4)$$

式(4)代入(3), 解得

$$\ddot{r} = 79.96\text{ m/s}^2 \quad (5)$$

式(4), (5)代入式(1), 得

$$\ddot{y} = 87.7\text{ m/s}^2$$

由质点动力学方程, 得

$$F - mg = m\ddot{y}$$

所以

$$F = m(g + \ddot{y}) = [5\,000(9.8 + 87.7)]\text{ kN} = 488\text{ kN}$$

10-10 1 物体质量 $m=10\text{ kg}$, 在变力 $F=100(1-t)\text{ N}$ 作用下运动。设物体初速度为 $v_0=0.2\text{ m/s}$, 开始时, 力的方向与速度方向相同。问经过多少时间后物体速度为零, 此前走了多少路程?

解 物体的运动方向只受 F 作用, 设物体由原点出发沿轴 x 正向运动, 如图 10-10 所示:

$$F = m\ddot{x} \quad (1)$$

将

$$F = 100(1-t)\text{ N}, m = 10\text{ kg}$$

代入式(1), 得

$$\ddot{x} = 10(1-t)$$

上式可改写成

$$d\dot{x} = 10(1-t)dt$$

两边积分, 得

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = 10\left(t - \frac{t^2}{2}\right) \text{ m/s}$$

由已知 $t=0$ 时,

$$v_0 = \dot{x}_0 = 0.2\text{ m/s}$$

得

$$\dot{x} = \left(0.2 + 10\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\right) \text{ m/s} \quad (2)$$

上式积分得

$$x = \left(0.2t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3 + x_0\right) \text{ m}$$

设物体开始运动时位于坐标原点, 在 $t=0$ 时, $x=0$, 故 $x_0=0$, 于是得到物体的运动方程

$$x = \left(0.2t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3\right) \text{ m} \quad (3)$$

由题意, 令式(2)中 $\dot{x}=0$, 解得

$$t = 2.02\text{ s}$$

代入式(3), 得

$$x = 7.06\text{ m}$$

10-11 如图 10-11 所示质点的质量为 m , 受指向原点 O 的力 $F=kr$ 作用, 力与质点到点 O 的距离成正比。如初瞬时质点的坐标为 $x=x_0, y=0$, 而速度的分量为 $v_x=0, v_y=v_0$ 。求质点的轨迹。

解 质点 m 为研究对象, 建立图 10-11 所示直角坐标系 Oxy , 质点受力 $F=-kr$ 作用。据

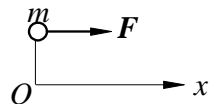


图 10-10

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

将其向 x 和 y 轴投影，得

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$-ky = m\ddot{y}$$

解这 2 个微分方程，并注意到初始条件：

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = 0$$

$$y|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}|_{t=0} = v_0$$

得微分方程的解

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ y = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{cases}$$

在上述解答中消去时间 t ，得质点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{k}{m} \frac{y^2}{v_0^2} = 1$$

轨迹为 1 个椭圆，圆心在 $(0, 0)$ ，长、短半轴分别为 x_0 和 $v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

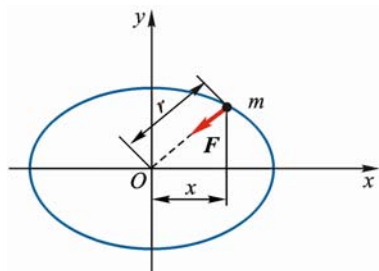


图 10-11

10-12 物体由高度 h 处以速度 v_0 水平抛出，如图 10-12a 所示。空气阻力可视为与速度的 1 次方成正比，即 $\mathbf{F} = -km\mathbf{v}$ ，其中 m 为物体的质量， \mathbf{v} 为物体的速度， k 为常系数。求物体的运动方程和轨迹。

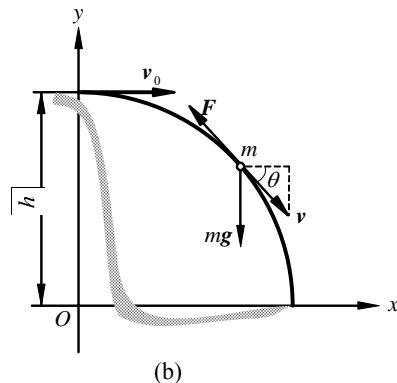
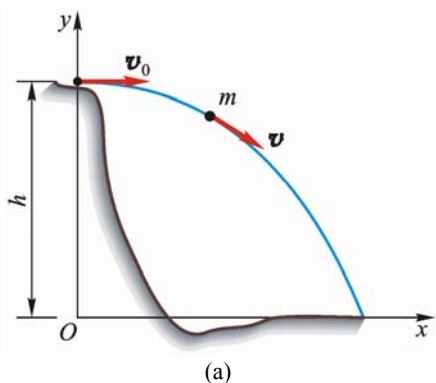


图 10-12

解 物体为研究对象，其运动和受力分析如图 10-12b 所示，选取图示直角坐标系 Oxy 。质点运动微分方程在直角坐标轴上的投影式：

$$m\ddot{x} = F_x = -kmv_x$$

$$m\ddot{y} = F_y - mg = -kmv_y - mg$$

即

$$\ddot{x} = -k\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -k\dot{y} - g$$

解这 2 个微分方程并注意到初始条件： $t=0$ 时，

$$x_0 = 0, y_0 = h, \dot{x}_0 = v_0, \dot{y}_0 = 0$$

方程的解为

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \\ y = h - \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \end{cases}$$

这就是物体的运动方程，由运动方程消去时间 t 得该物体的轨迹方程

$$y = h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}$$

10-13 1 质点带有负电荷 e ，其质量为 m ，以初速度 v_0 进入强度为 H 的均匀磁场中，该速度方向与磁场强度方向垂直。设已知作用于质点的力为 $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ ，求质点的运动轨迹。

提示：解题时宜采用在自然轴上投影的运动微分方程。

解 质点为研究对象，其受力与运动分析如图 10-13，选图 10-13 所示坐标系 mnt ，质点在 mnt 平面内，也就是速度 \mathbf{v} 与力 \mathbf{F} 决定的平面内运动。质点沿 t 及 n 轴的运动微分方程：

$$m \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = evH \quad (2)$$

由式 (1) 解得

$$v = \text{常量} = v_0$$

代入式 (2) 得

$$\rho = \frac{mv_0}{eH}$$

所以质点运动轨迹为由进入磁场位置起的半径为 $\rho = \frac{mv_0}{eH}$ 的圆弧。

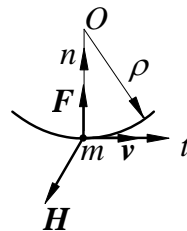


图 10-13

第 11 章 动量定理

11-1 汽车以 36 km/h 的速度在平直道上行驶。设车轮在制动后立即停止转动。问车轮对地面的动滑动摩擦因数 f 应为多大才能使汽车在制动后 6 s 停止。

解 将汽车作为质点进行研究，制动后汽车受重力 W ，地面约束反力 F_N 和与运动方向相反的摩擦阻力 F 作用，以汽车运动方向为轴 Ox ，如图。根据动量定理在轴 x 的投影式，有

$$mv_x - mv_{Ox} = I_x$$

其中 $v_x = 0, v_{Ox} = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$

$$I_x = -Ft = -fF_N t = -fWt$$

当 $t = 6 \text{ s}$ 时，有

$$0 - \frac{W}{g} \times 10 \text{ m/s} = fW \times 6 \text{ s}, \quad f = 0.17$$

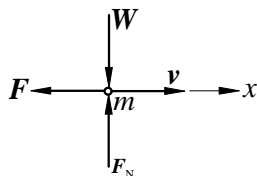


图 11-1

11-2 跳伞者质量为 60 kg，自停留在高空中的直升飞机中跳出，落下 100 m 后，将降落伞打开。设开伞前的空气阻力略去不计，伞重不计，开伞后所受的阻力不变，经 5 s 后跳伞者的速度减为 4.3 m/s。求阻力的大小。

解 取跳伞者为研究对象，开伞前，他受重力 mg 作用，竖直下落，令跳伞者自由下落 100 m 后速度为 v_1 ，则

$$v_1 = \sqrt{2gh} = (\sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 100}) \text{ m/s} = 44.3 \text{ m/s}$$

开伞后，他受重力 mg 和阻力 F 作用，如图 11-2 所示。取铅直轴 y 向下为正，根据动量定理有

$$mv_2 - mv_1 = I_y = (mg - F)t$$

由题知：当 $t = 5 \text{ s}$ 时，有

$$v_2 = 4.3 \text{ m/s}$$

即

$$60 \times (4.3 - 44.3) = (60 \times 9.8 - F) \times 5$$

$$F = 1068 \text{ N} = 1.068 \text{ kN}$$

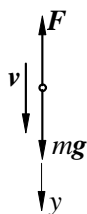


图 11-2

11-3 如图 11-3a 所示浮动起重机举起质量 $m_1 = 2000 \text{ kg}$ 的重物。设起重机质量 $m_2 = 2000 \text{ kg}$ ，杆长 $OA = 8 \text{ m}$ ；开始时杆与铅直位置成 60° 角，水的阻力和杆重均略去不计。当起重杆 OA 转到与铅直位置成 30° 角时，求起重机的位移。

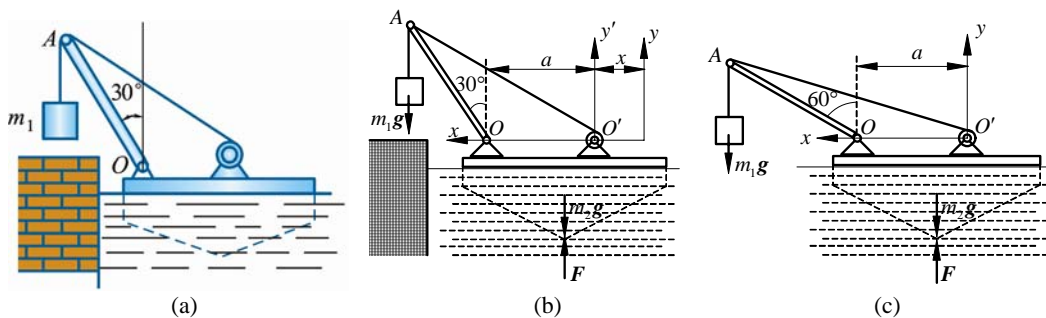


图 11-3

解 取浮动起重机与重物为研究对象，由于不受水平方向外力作用且系统原来静止，故其质心的水平坐标不变，取坐标系 $O'xy$ ，其中轴 $O'y$ 通过船体中心的初始位置。设起重机位移为 x ，船半宽为 a ，由质心坐标公式得

(1) 起重杆 OA 与铅直线成 60° 角时，(如图 11-3c 所示)

$$x_{C1} = \frac{m_1(OA \sin 60^\circ + a)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (a + 8 \sin 60^\circ)$$

(2) 起重杆 OA 与铅直线成 30° 角时 (如图 11-3b 所示)

$$x_{C2} = \frac{m_1(x + a + \overline{OA} \sin 30^\circ) + m_2 x}{m_1 + m_2} = x + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (a + 8 \sin 30^\circ)$$

因系统质心水平坐标守恒：

$$x_{C1} = x_{C2}$$

所以

$$x = \frac{8m_1}{m_1 + m_2} (\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) = \left[\frac{8 \times 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)}{2 + 20} \right] \text{ m} = 0.266 \text{ m}$$

故起重机位置向左移动了 0.266 m。

11-4 如图 11-4a 所示水平面上放 1 均质三棱柱 A，在其斜面上又放 1 均质三棱柱 B。两三棱柱的横截面均为直角三角形。三棱柱 A 的质量为 m_A 三棱柱 B 质量 m_B 的 3 倍，其尺寸如图 11-4a 所示。设各处摩擦不计，初始时系统静止。求当三棱柱 B 沿三棱柱 A 滑下接触到水平面时，三棱柱 A 移动的距离。

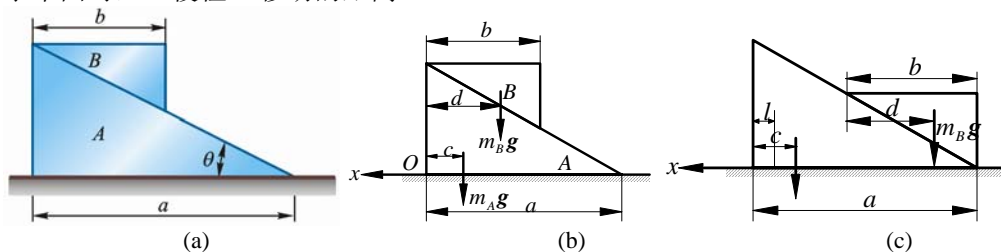


图 11-4

解 取 A、B 两三棱柱组成 1 质点系为研究对象，把坐标轴 Ox 固连于水平面上， O 在三棱柱 A 左下角的初始位置。由于在水平方向无外力作用，且开始时系统处于静止，故系统质心位置在水平方向守恒。设 A、B 两棱柱质心初始位置（如图 11-4b 所示）在 x 方向坐标分别为

$$x_1 = -c = -\frac{a}{3},$$

$$x_2 = -d = -\frac{2}{3}b$$

当棱柱 B 接触水平面时，如图 11-4c 所示。两棱柱质心坐标分别为

$$x'_1 = l - c = l - \frac{a}{3}$$

$$x'_2 = l - (a - b + d) = l - (a - \frac{b}{3})$$

系统初始时质心坐标

$$x_C = \frac{m_A(-\frac{a}{3}) + m_B(-\frac{2}{3}b)}{m_A + m_B} = -\frac{m_A a + 2m_B b}{3(m_A + m_B)}$$

棱柱 B 接触水平面时系统质心坐标

$$x'_C = \frac{m_A(l - \frac{a}{3}) + m_B[l - (a - \frac{b}{3})]}{m_A + m_B} = \frac{3(m_A + m_B)l - a(m_A + 3m_B) + m_B b}{3(m_A + m_B)}$$

因

$$x_C = x'_C$$

并注意到

$$m_A = 3m_B$$

得

$$l = \frac{a-b}{4}$$

11-5 平台车质量 $m_1 = 500 \text{ kg}$ ，可沿水平轨道运动。平台车上站有 1 人，质量 $m_2 = 70 \text{ kg}$ ，车与人以共同速度 v_0 向右方运动。如人相对平台车以速度 $v_r = 2 \text{ m/s}$ 向左方跳出，不计平台车水平方向的阻力及摩擦，问平台车增加的速度为多少？

解 以车与人为质点系进行研究，因为质点系在水平方向不受外力作用，见图 11-5，故系统在水平方向动量守恒。以水平方向向右为 x 轴正向，人跳出时平台车速度为 v ，则水平方向动量守恒式为：

图 11-5

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1v + m_2(v - v_r)$$

代入数据解得

$$v = v_0 + 0.246$$

$$\Delta v = v - v_0 = 0.246 \text{ m/s}$$

11-6 如图 11-6a 所示，均质杆 AB ，长 l ，直立在光滑的水平面上。求它从铅直位置无初速地倒下时，端点 A 相对图 11-6b 所示坐标系的轨迹。

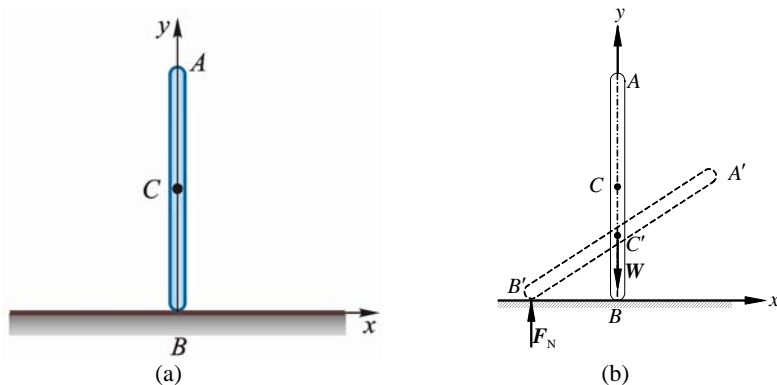


图 11-6

解 取均质杆 AB 为研究对象，建立图 11-6b 所示坐标系 Oxy ，原点 O 与杆 AB 运动初始时的点 B 重合，因为杆只受铅垂方向的重力 W 和地面约束反力 F_N 作用，且系统开始时静止，所以杆 AB 的质心沿轴 x 坐标恒为零，即

$$x_C = 0。$$

设任意时刻杆 AB 与水平 x 轴夹角为 θ ，则点 A 坐标

$$x = \frac{l}{2} \cos \theta, \quad y = l \sin \theta$$

从点 A 坐标中消去角度 θ ，得点 A 轨迹方程

$$4x^2 + y^2 = l^2 \text{ (椭圆)}$$

11-7 如图 11-7a 所示椭圆规尺 AB 的质量为 $2m_1$ ，曲柄 OC 的质量为 m_1 ，而滑块 A 和 B 的质量均为 m_2 。已知： $OC=AC=CB=l$ ；曲柄和尺的质心分别在其中点上；曲柄绕轴 O 转动的角速度 ω 为常数。当开始时，曲柄水平向右，求此时质点系的动量。

解 将质点系统分为 2 部分，第 1 部分为尺 AB 和滑块 A 、 B ，由于对称其质心在点 C ，第 2 部分为曲柄 OC ，其质心在 OC 的中点 C_1 上，根据质点系的动量计算式，有

$$\mathbf{p} = (2m_1 + 2m_2)\mathbf{v}_C + m_1\mathbf{v}_{C_1} \quad (1)$$

因为 \mathbf{v}_C 和 \mathbf{v}_{C_1} 均垂直于曲柄 OC ，故动量 \mathbf{p} 也垂直于 OC 。将

$$v_C = 2v_{C_1} = l\omega$$

代入式(1)，得

$$p = \frac{l\omega}{2}(5m_1 + 4m_2) \quad (\text{方向如图 11-7b 所示})$$

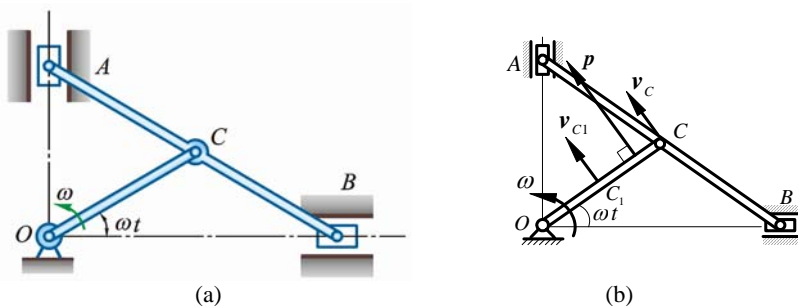


图 11-7

11-8 质量为 m_1 的平台 AB ，放于水平面上，平台与水平面间的动滑动摩擦系数为 f 。质量为 m_2 的小车 D ，由绞车拖动，相对于平台的运动规律为 $s = \frac{1}{2}bt^2$ ，其中 b 为已知常数。不计绞车的质量，求平台的加速度。

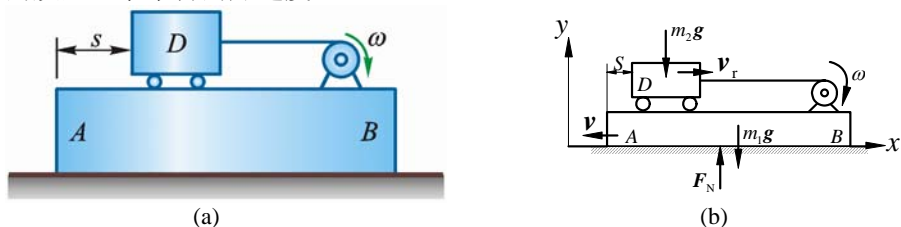


图 11-8

解 受力和运动分析如图 11-8b 所示

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{s} = bt \\ a_r &= \ddot{s} = b \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{Da} &= a_e + a_r = a_{AB} + a_r \\ a_{Da} &= a_r - a_{AB} \end{aligned} \quad (2)$$

$$m_2(a_r - a_{AB}) - m_1a_{AB} = F \quad (3)$$

$$F = f(m_1 + m_2)g \quad (4)$$

式 (1)、(4) 代入式 (3)，得

$$\begin{aligned} m_2(b - a_{AB}) - m_1a_{AB} &= f(m_1 + m_2)g \\ m_2b - (m_1 + m_2)a_{AB} &= fg(m_1 + m_2) \\ a_{AB} &= \frac{-fg(m_1 + m_2) + m_2b}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}b - fg \end{aligned}$$

11-9 求题 11-4 中三棱柱 A 运动的加速度及地面对三棱柱的约束力。

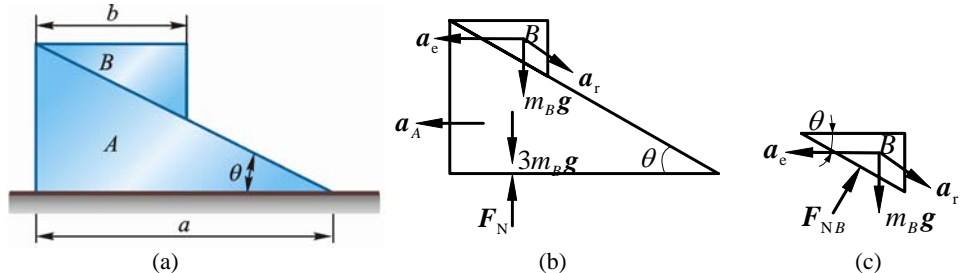


图 11-9

解 (1) 水平方向外力为零，设 A 的加速度为 a_A ，由图 11-9b 所示

$$a_B = a_e + a_r$$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_A, \quad m_A = 3m_B$$

$$3m_B a_A + m_B (a_e - a_r \cos \theta) = 0$$

即

$$4m_B a_A = m_B a_r \cos \theta, \quad 4a_A = a_r \cos \theta \quad (1)$$

(2) 块 B 受力和加速度分析如图 c。 a_r 方向：

$$m_B g \sin \theta = m_B (a_r - a_e \cos \theta)$$

式 (1) 代入上式，即

$$g \sin \theta = \frac{4a_A}{\cos \theta} - a_A \cos \theta$$

$$g \sin \theta \cos \theta = 4a_A - a_A \cos^2 \theta \quad (2)$$

$$a_A = \frac{g \sin \theta \cos \theta}{4 - \cos^2 \theta} = \frac{g \sin \theta \cos \theta}{3 + \sin^2 \theta} \quad (3)$$

(3) 图 11-9b 所示， F_N 方向向上

$$3m_B g + m_B g - F_N = m_B a_r \sin \theta \quad (4)$$

式 (3) 代入式 (1)，得

$$a_r = \frac{4a_A}{\cos \theta} = \frac{4g \sin \theta}{4 - \cos^2 \theta}$$

上式代入式 (4) 得

$$F_N = 4m_B g - m_B \frac{4g \sin^2 \theta}{4 - \cos^2 \theta} = 4m_B g \frac{3}{3 + \sin^2 \theta} = \frac{12m_B g}{3 + \sin^2 \theta}$$

11-10 如图 11-10a 所示，质量为 m 的滑块 A ，可以在水平光滑槽中运动，具有刚性系数为 k 的弹簧 1 端与滑块相连接，另 1 端固定。杆 AB 长度为 l ，质量忽略不计， A 端与滑块 A 铰接， B 端装有质量 m_1 ，在铅直平面内可绕点 A 旋转。设在力偶 M 作用下转动角速度 ω 为常数。求滑块 A 的运动微分方程。

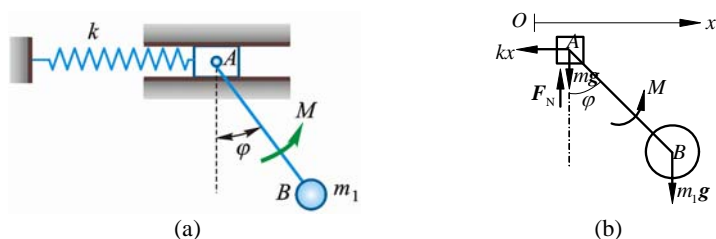


图 11-10

解 取滑块 A 和小球 B 组成的系统为研究对象，建立向右坐标 x ，原点取在运动开始时滑块 A 的质心上，则质心之 x 坐标为 ($\varphi = \omega t$)

$$x_C = \frac{mx + m_1(x + l \sin \omega t)}{m + m_1}$$

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} + \frac{-m_1}{m + m_1} l \omega^2 \sin \omega t$$

系统质心运动定理：

$$(m + m_1) \ddot{x}_C = -kx$$

$$\ddot{x} - \frac{m_1}{m + m_1} l \omega^2 \sin \omega t = -\frac{k}{m + m_1} x$$

即

$$\ddot{x} + \frac{k}{m + m_1} x = \frac{m_1}{m + m_1} l \omega^2 \sin \omega t$$

此即滑块 A 的运动微分方程。

讨论: 设 $t=0, x=0, \dot{x}=0$, 则由上述方程得滑块 A 的稳态运动规律(特解)

$$x_p = \frac{m_1 l \omega^2}{k - (m + m_1) \omega^2} \sin \omega t$$

原题力矩 M 只起保证 $\omega = \text{常数}$ 的作用, 实际上 M 是随 φ 变化的。

11-11 在图 11-11a 所示曲柄滑杆机构中曲柄以等角速度 ω 绕轴 O 转动。开始时, 曲柄 OA 水平向右。已知: 曲柄的质量为 m_1 , 滑块 A 的质量为 m_2 , 滑杆的质量为 m_3 , 曲柄的质心在 OA 的中点, $OA = l$; 滑杆的质心在点 C , 而 $BC = \frac{l}{2}$ 。求: (1) 机构质量中心的运动方程; (2) 作用点 O 的最大水平力。

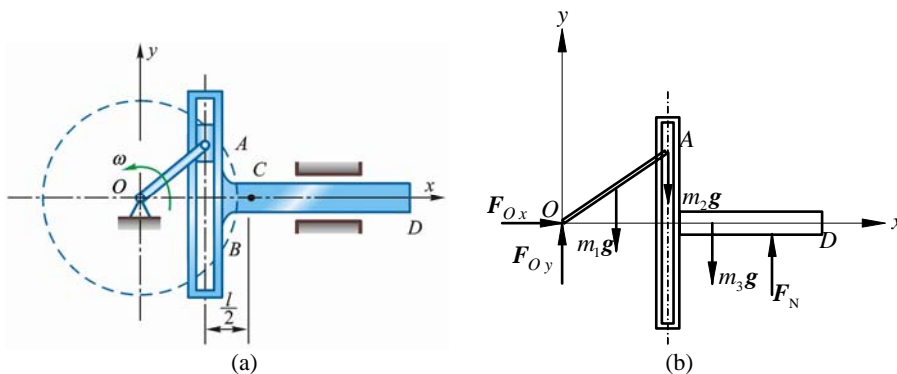


图 11-11

解 (1) 整个系统为研究对象, 建立图示直角坐标 Oxy 。求得系统的质心坐标

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 \frac{l}{2} \cos \omega t + m_2 l \cos \omega t + m_3 (l \cos \omega t + \frac{l}{2})}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{m_3 l}{2(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l \cos \omega t \\ y_C &= \frac{m_1 \cdot \frac{l}{2} \sin \omega t + m_2 l \sin \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 + 2m_2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l \sin \omega t \end{aligned}$$

(2) 整个系统为研究对象, 其受力分析如图 11-11b 所示, 在 x 方向系统只受点 O 约束力 F_{Ox} 作用, 根据质心运动定理在轴 x 上的投影式得

$$F_{Ox} = (m_1 + m_2 + m_3) a_C$$

其中

$$a_C = \ddot{x}_C = -\frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l \omega^2 \cos \omega t$$

则

$$F_{Ox} = \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2} l \omega^2 \cos \omega t$$

故作用在 O 处最大水平约束力为

$$F_{Ox \max} = \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2} l \omega^2$$

11-12 如图 11-12a 所示凸轮机构中, 凸轮以等角速度 ω 绕定轴 O 转动。质量为 m_1 的滑杆 I 借右端弹簧的推压而顶在凸轮上, 当凸轮转动时, 滑杆作往复运动。设凸轮为均质圆盘, 质量为 m_2 , 半径为 r , 偏心距为 e 。求在任一瞬时机座螺钉的总约束力。

解 取凸轮机构为研究对象, 设机座重 $m_3 g$, 重心在点 C , 建立图示定坐标 Oxy , 设运动初始时, 凸轮轮心在轴 x 上点 O 的右边, 如图 11-12c 所示。根据质心坐标公式, 得

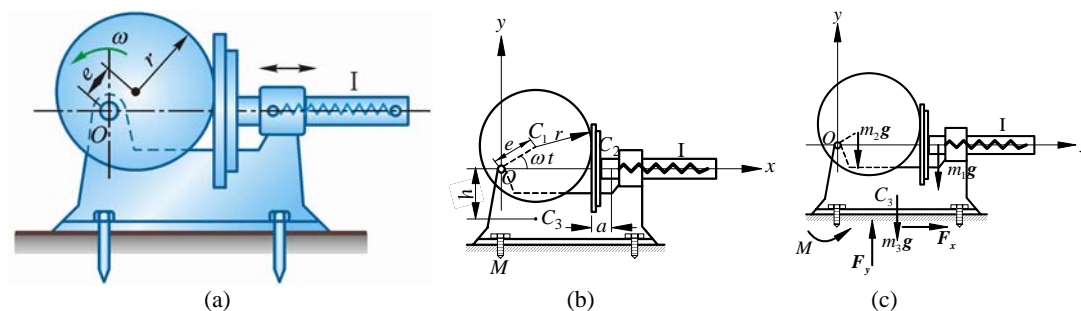


图 11-12

$$x_C = \frac{m_2 e \cos \omega t + m_1 (e \cos \omega t + r + a) + m_3 b}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_C = \frac{m_2 e \sin \omega t - m_3 h}{m_1 + m_2 + m_3}$$

将上述各量代入上式，并对时间 t 求 2 次导数，得

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_C = -(m_1 + m_2) e \omega^2 \cos \omega t \quad (1)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_C = -m_2 e \omega^2 \sin \omega t$$

设螺钉总水平约束力为 F_{Rx} ，总铅垂约束力为 F_{Ry} ，如图 11-12c 所示。据质心运动定理有

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_C = F_{Rx} \quad (2)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_C = F_{Ry} - (m_1 + m_2 + m_3)g$$

比较方程组 (1) 和 (2)，得任意瞬时机座螺钉的总约束力为

$$F_{Rx} = -(m_1 + m_2) e \omega^2 \cos \omega t$$

$$F_{Ry} = (m_1 + m_2 + m_3)g - m_2 e \omega^2 \sin \omega t$$

故总动约束力为

$$F'_{Rx} = (m_1 + m_2) e \omega^2 \cos \omega t$$

$$F'_{Ry} = -m_2 e \omega^2 \sin \omega t$$

11-13 水流以速度 $v_0=2$ m/s 流入固定水道，速度方向与水平面成 90° 角，如图 11-13a 所示。水流进口截面积为 0.02 m²，出口速度 $v_1=4$ m/s，它与水平面成 30° 角。求水作用在水道壁上的水平和铅直的附加压力。

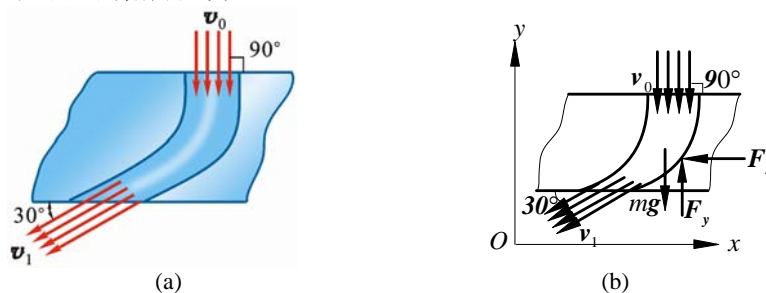


图 11-13

解 将水道中的水流作为研究对象，管壁对于流体的附加动约束力

$$\mathbf{F} = q_V \rho (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \quad (1)$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

由不可压缩流体的连续性定律知

$$q_V = v_0 A_0 = v_1 A_1$$

将式 (1) 参照图 11-13b 分别向轴 x , y 投影，得

$$-F_x = -v_0 A_0 v_1 \cos 30^\circ \cdot \rho$$

$$F_y = v_0 A_0 [-v_1 \sin 30^\circ - (-v_0)] \rho$$

将 $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $A_0 = 0.02 \text{ m}^2$, $v_1 = 4 \text{ m/s}$

代入上式, 得

$$F_x = 139 \text{ N } (\leftarrow), \quad F_y = 0$$

水对管壁作用的附加动压力

$$F'_x = 139 \text{ N } (\rightarrow), \quad F'_y = 0$$

F'_x 方向与 F_x 方向相反。

11-14 已知水的体积流量为 $q_v \text{ m}^3/\text{s}$, 密度为 $\rho \text{ kg/m}^3$; 水冲击叶片的速度为 $v_1 \text{ m/s}$, 方向沿水平向左; 水流出叶片的速度为 $v_2 \text{ m/s}$, 与水平线成 θ 角。求图 11-14a 所示水柱对涡轮固定叶片作用力的水平分力。

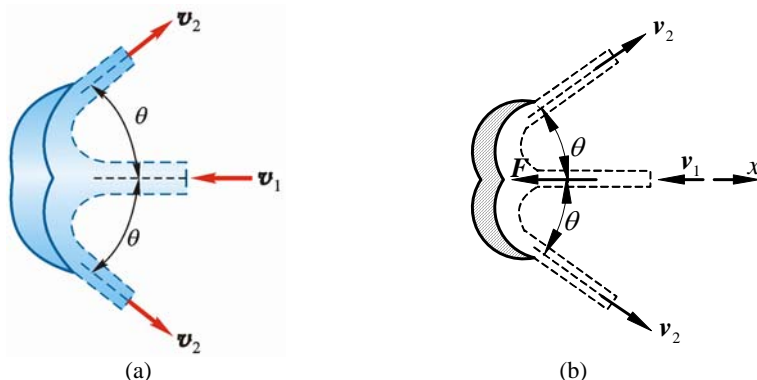


图 11-14

解 根据液体流过弯道时的动压力公式有

$$F = q_v \rho (v_1 - v_2)$$

将其向水平方向投影得

$$F_x = q_v \rho (v_1 + v_2 \cos \theta)$$

11-15 如图 11-15a 所示传送带的运煤量恒为 20 kg/s , 胶带速度恒为 1.5 m/s 。求胶带对煤块作用的水平总推力。

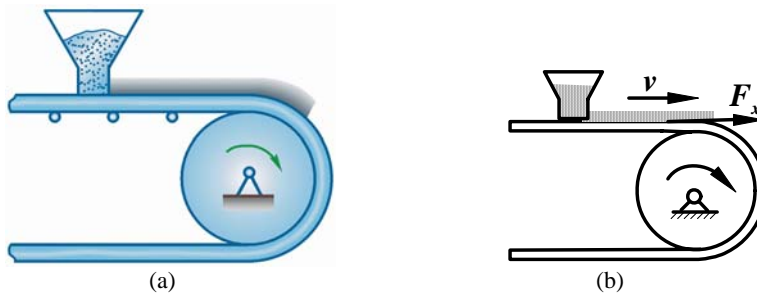


图 11-15

解 设皮带作用煤块的总水平推力为 F_x , 皮带在 dt 时间内输送量为 $q_v dt$, 由动量定理微分形式, 如图 11-15b 所示, 得

$$q_v dt \cdot v = F_x dt$$

$$F_x = q_v v = (20 \times 1.5) \text{ N} = 30 \text{ N}$$

11-16 如图 11-16a 所示移动式胶带输送机, 每小时可输送 109 m^3 的砂子。砂子的密度为 1400 kg/m^3 , 输送带速度为 1.6 m/s , 设砂子在入口处的速度为 v_1 , 方向垂直向下, 在出口处的速度为 v_2 , 方向水平向右。如输送机不动, 问此时地面沿水平方向总的阻力有多大?

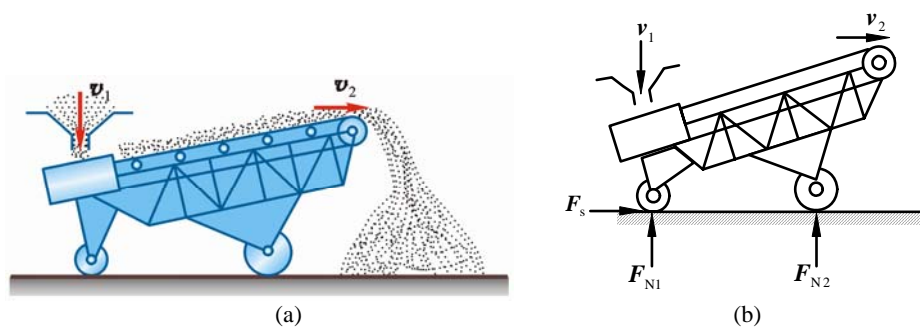


图 11-16

解 体积流量

$$q_v = 109 \text{ m}^3 / 3600 \text{ s} = 0.03038 \text{ m}^3/\text{s}$$

质量流量

$$q_v \rho = (0.03038 \times 1400) \text{ kg/s} = 42.39 \text{ kg/s}$$

$$v_2 = 1.6 \text{ m/s}$$

水平阻力

$$F = (42.39 \times 1.6) \text{ N} = 67.8 \text{ N}$$

第 12 章 动量矩定理

12-1 质量为 m 的点在平面 Oxy 内运动，其运动方程为

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \sin 2\omega t$$

式中 a , b 和 ω 为常量。求质点对原点 O 的动量矩。

解 由运动方程对时间的 1 阶导数得原点的速度

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 2b\omega \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (1)$$

质点对点 O 的动量矩为

$$\begin{aligned} L_O &= M_O(mv_x) + M_O(mv_y) = -mv_x \cdot y + mv_y \cdot x \\ &= -m \cdot (-a\omega \sin \omega t) \cdot b \sin 2\omega t + m \cdot 2b\omega \cos 2\omega t \cdot a \cos \omega t \\ &= 2mab\omega \cos^3 \omega t \end{aligned}$$

用矢量表示有

$$L_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = (xi + yj) \times (m\dot{x}i + m\dot{y}j) = (xm\dot{y} - ym\dot{x})k$$

其中 \dot{x}, \dot{y} 由式 (1) 确定。

12-2 无重杆 OA 以角速度 ω_0 绕轴 O 转动，质量 $m = 25 \text{ kg}$ ，半径 $R = 200 \text{ mm}$ 的均质圆盘以 3 种方式安装于杆 OA 的点 A ，如图 12-12a 所示。在图 12-12a 中，圆盘与杆 OA 焊接在一起，在图 12-12b 中，圆盘与杆 OA 在点 A 铰接，且相对杆 OA 以角速度 ω_r 逆时针向转动。在图 12-12c 中，圆盘相对杆 OA 以角速度 ω_r 顺时针向转动。已知 $\omega_0 = \omega_r = 4 \text{ rad/s}$ ，计算在此 3 种情况下，圆盘对轴 O 的动量矩。

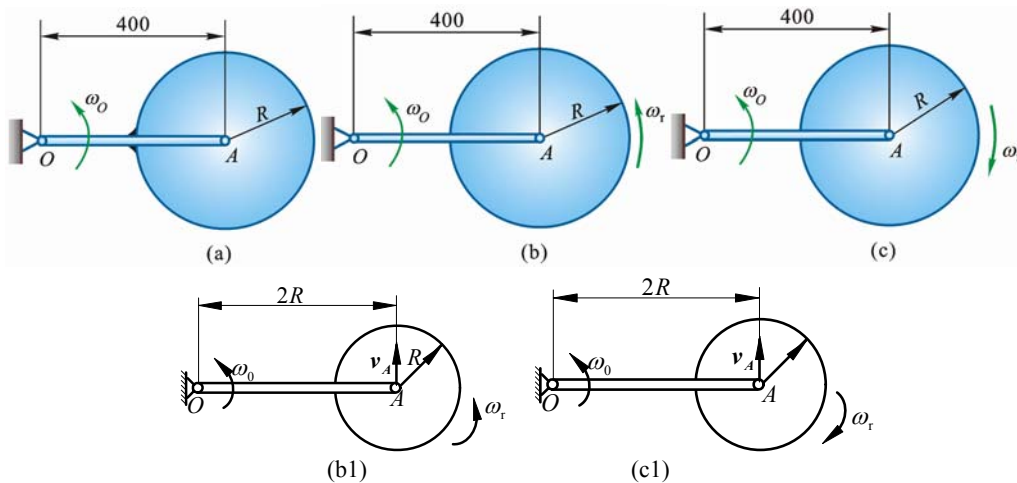


图 12-2

解 (1) 在图 12-2a 中，轮 A 绕 O 定轴转动

$$J_O = \frac{1}{2}mR^2 + m(2R)^2 = \frac{9}{2}mR^2$$

$$L_O = J_O\omega_0 = \frac{9}{2}\omega_0 mR^2 = 18 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

(2) 在图 12-2b1 中，轮 A 作平面运动

$$\begin{aligned} L_O &= m \cdot v_A \cdot 2R + J_A\omega_a \\ &= m \cdot 2R\omega_0 \cdot 2R + \frac{1}{2}mR^2 \cdot (\omega_0 + \omega_r) = 5\omega_0 mR^2 = 20 \text{ kgm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

(3) 在图 12-2c1 中, 轮 A 绕 O 作圆周曲线平移

$$L_O = m \cdot 2R\omega_O \cdot 2R + J_A\omega_a$$

$$\omega_a = \omega_O - \omega_r = 0$$

$$L_O = 4R^2\omega_O m = (4 \times 0.2^2 \times 4 \times 25) \text{kgm/s} = 16 \text{kgm/s}$$

12-3 如图 12-3 所示, 质量为 m 的偏心轮在水平面上作平面运动。轮子轴心为 A , 质心为 C , $AC=e$; 轮子半径为 R , 对轴心 A 的转动惯量为 J_A ; C, A, B 三点在同 1 铅直线上。

(1) 当轮子只滚不滑时, 若 v_A 已知, 求轮子的动量和对地面上点 B 的动量矩。(2) 当轮子又滚又滑时, 若 v_A 、 ω 已知, 求轮子的动量和对地面上点 B 的动量矩。

解 (1) 当轮子只滚不滑时, 轮上点 B 为速度瞬心。

轮子角速度

$$\omega = \frac{v_A}{R}$$

质心 C 的速度

$$v_C = \omega \overline{BC} = \frac{v_A}{R}(R+e)$$

轮子的动量

$$p = mv_C = \frac{R+e}{R}mv_A \quad (\rightarrow)$$

对点 B 动量矩

$$L_B = J_B \cdot \omega$$

$$J_B = J_C + m(R+e)^2 = J_A - me^2 + m(R+e)^2$$

$$L_B = [J_A - me^2 + m(R+e)^2] \frac{v_A}{R}$$

(2) 当轮子又滚又滑时由基点法求得点 C 速度。

$$v_C = v_A + v_{CA} = v_A + \omega e$$

轮子动量

$$p = mv_C = m(v_A + \omega e) \quad (\rightarrow)$$

对点 B 动量矩

$$\begin{aligned} L_B &= mv_C BC + J_C \omega = m(v_A + \omega e)(R+e) + (J_A - me^2)\omega \\ &= mv_A(R+e) + \omega(J_A + mRe) \end{aligned}$$

12-4 1 半径为 R , 质量为 m_1 的均质圆盘, 可绕通过其中心 O 的铅垂轴无摩擦地旋转,

如图 12-4a 所示。1 质量为 m_2 的人在盘上由点 B 按规律 $s = \frac{1}{2}at^2$ 沿半径为 r 的圆周行走。

开始时, 圆盘和人静止。求圆盘的角速度和角加速度 α 。

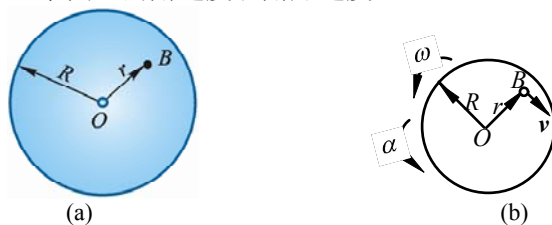


图 12-4

解 以人和圆盘为质点系, 由于作用于系统的外力(重力和轴 O 的约束力)对轴 O 的矩均为零, 所以人和圆盘组成的系统对轴 O 的动量矩守恒。设人在盘上绕轴 O 顺时针走圆周, 则盘必逆时针转, 圆盘对轴 O 的动量矩为

$$L_1 = J \cdot \omega = \frac{m_1 R^2}{2} \cdot \omega$$

人随圆盘转的牵连速度和人对圆盘的相对速度都沿圆周切向。以反时针转为正向，牵连速度的投影为 $r\omega$ ，相对速度的投影为

$$-\dot{s} = -at$$

人对地面的绝对速度的投影为

$$v_0 = r\omega - \dot{s} = r\omega - at$$

其方向与 r 垂直，所以人对轴 O 的动量矩为

$$L_2 = m_2(r\omega - at) \cdot r$$

由质点系动量矩守恒定律有

$$0 = \frac{m_1 R^2}{2} \omega + m_2(r\omega - at) \cdot r$$

$$\omega = \frac{2m_2 art}{R^2 m_1 + 2m_2 r^2}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{2m_2 ar}{R^2 m_1 + 2m_2 r^2}$$

12-5 如图 12-5a 所示水平圆板可绕轴 z 转动。在圆板上有 1 质点 M 作圆周运动，已知其速度的大小为常量，等于 v_0 ，质点 M 的质量为 m ，圆的半径为 r ，圆心到 z 轴的距离为 l ，点 M 在圆板的位置由角 φ 确定，如图 12-5a 所示。如圆板的转动惯量为 J ，并且当点 M 离轴 z 最远在点 M_0 时，圆板的角速度为零。轴的摩擦和空气阻力略去不计，求圆板的角速度与角 φ 的关系。

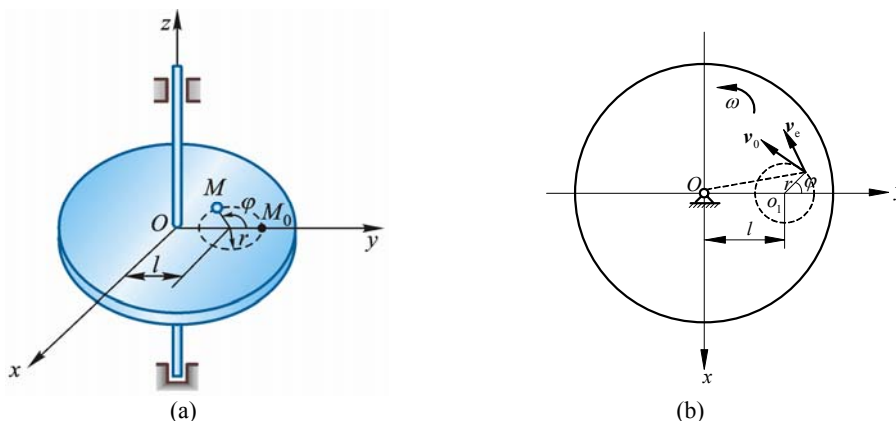


图 12-5

解 以圆板和质点 M 为系统，因为系统所受外力（包括重力和约束力）对轴 z 的矩均为零，故系统对轴 z 动量矩守恒。在任意时刻点 M 的速度包含相对速度 v_0 和牵连速度 v_e 。其中

$$v_e = OM \cdot \omega$$

设质点 M 在 M_0 位置为起始位置，该瞬时系统对轴 z 的动量矩

$$L_{z1} = mv_0(l+r) \quad (1)$$

在任意时刻：

$$L_{z2} = J\omega + M_z(mv_M) = J\omega + M_z(mv_0) + M_z(mv_e)$$

由图 12-5b 中，可得

$$L_{z2} = J\omega + mv_0[l \cos \varphi + r] + m(l^2 + r^2 + 2lr \cos \varphi)\omega \quad (2)$$

根据动量矩守恒定律

$$L_{z1} = L_{z2} \quad (3)$$

由式 (1)、(2)、(3) 得

$$\omega = \frac{mlv_0(1 - \cos \varphi)}{J + m(l^2 + r^2 + 2lr \cos \varphi)}$$

12-6 如图 12-6a 所示 A 为离合器, 开始时轮 2 静止, 轮 1 具有角速度 ω_0 。当离合器接合后, 依靠摩擦使轮 2 启动。已知轮 1 和 2 的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 。求: (1) 当离合器接合后, 两轮共同转动的角速度; (2) 若经过 t 秒两轮的转速相同, 求离合器应有多大的摩擦力矩。

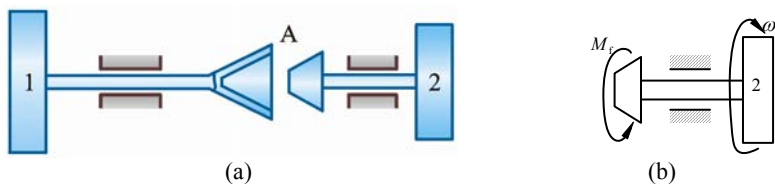


图 12-6

解 (1) 以轮 1 和 2 为一个系统进行研究, 因为系统所受外力 (包括重力和约束反力) 对转轴之矩均为零, 所以系统对转轴的动量矩守恒, 即

$$J_1 \omega_0 = (J_1 + J_2) \omega$$

$$\omega = \frac{J_1 \omega_0}{J_1 + J_2}$$

(2) 以轮 2 为研究对象, 受力分析如图 12-6b 所示, 根据动量矩定理对于转轴的投影式得

$$\frac{dL_z}{dt} = M_f$$

两边积分

$$\int_0^L dL_z = \int_0^t M_f dt$$

设 M_f 为常值力矩得

$$L_z = M_f t \quad (1)$$

又

$$L_z = J_2 \omega = \frac{J_1 J_2 \omega_0}{J_1 + J_2} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$M_f = \frac{J_1 J_2 \omega_0}{(J_1 + J_2) t}$$

12-7 如图 12-7a 所示两带轮的半径为 R_1 和 R_2 , 其质量各为 m_1 和 m_2 , 两轮以胶带相连接, 各绕两平行的固定轴转动。如在第 1 个带轮上作用矩为 M 的主动力偶, 在第 2 个带轮上作用矩为 M' 的阻力偶。带轮可视为均质圆盘, 胶带与轮间无滑动, 胶带质量略去不计。求第 1 个带轮的角加速度。

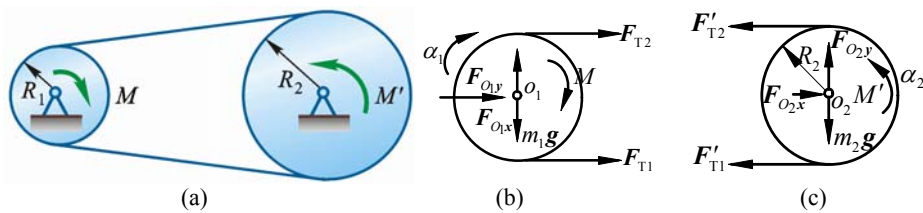


图 12-7

解 分别取两皮带轮为研究对象, 其受力如图 12-7b、12-7c 所示, 其中

$$F_{T1} = F'_{T1} \quad (1)$$

$$F_{T2} = F'_{T2}$$

以顺时针转向为正, 分别应用两轮对其转动轴的转动微分方程有

$$J_1 \alpha_1 = M - (F_{T1} - F_{T2}) R_1 \quad (2)$$

$$J_2 \alpha_2 = (F'_{T1} - F'_{T2}) R_2 - M' \quad (3)$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 = R_2 : R_1$$

式 (1)、(2)、(3) 联立, 解得

$$\alpha_1 = \frac{M - \frac{R_1}{R_2} M'}{J_1 + J_2 \frac{R_1^2}{R_2^2}}$$

式中 $J_1 = \frac{m_1}{2} R_1^2$, $J_2 = \frac{m_2}{2} R_2^2$

$$\alpha_1 = \frac{2(R_2 M - R_1 M')}{(m_1 + m_2) R_2 R_1^2}$$

12-8 如图 12-8a 所示, 为求半径 $R = 0.5 \text{ m}$ 的飞轮 A 对于通过其重心轴的转动惯量, 在飞轮上绕以细绳, 绳的末端系 1 质量为 $m_1 = 8 \text{ kg}$ 的重锤, 重锤自高度 $h = 2 \text{ m}$ 处落下, 测得落下时间 $t_1 = 16 \text{ s}$ 。为消去轴承摩擦的影响, 再用质量为 $m_2 = 4 \text{ kg}$ 的重锤作第 2 次试验, 此重锤自同 1 高度落下的时间为 $t_2 = 25 \text{ s}$ 。假定摩擦力矩为 1 常数, 且与重锤的重量无关, 求飞轮的转动惯量和轴承的摩擦力矩。

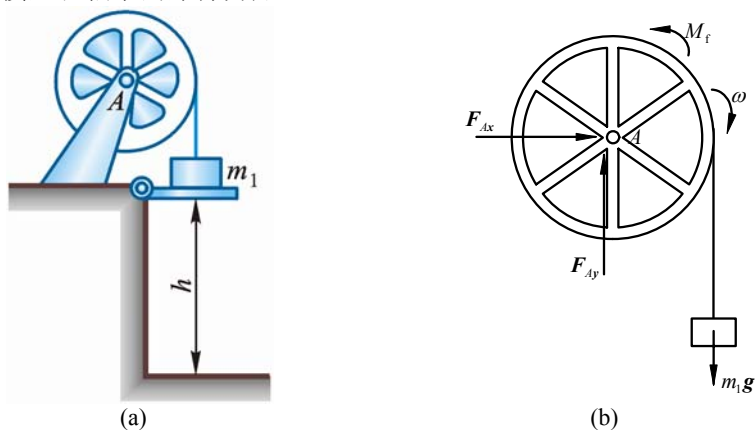


图 12-8

解 取飞轮 A 及重物为质点系, 设摩擦阻力偶矩为 M_f , 飞轮转动惯量为 J_A , 如图 12-8b 所示。根据对轴 A 的投影式动量矩定理有

$$\frac{dL_A}{dt} = -M_f + m_1 g R, \quad L_A = J_A \omega + m_1 \omega R^2$$

$$(J_A + m_1 R^2) d\omega = (M_f + m_1 g R) dt$$

两边积分得

$$\int_0^\omega (J_A + m_1 R^2) d\omega = \int_0^{t_1} (-M_f + m_1 g R) dt$$

$$\omega = \frac{-M_f + m_1 g R}{J_A + m_1 R^2} \cdot t_1$$

而 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $t_1 = 0$ 时, $\theta = 0$

$$\theta = \frac{m_1 g R - M_f}{J_A + m_1 R^2} \cdot \frac{t_1^2}{2}$$

又 $\theta = \frac{h}{R}$

故 $\frac{h}{R} = \frac{m_1 g R - M_f}{J_A + m_1 R^2} \cdot \frac{t_1^2}{2}$ (1)

将第 1 次试验时 m_1 , t_1 替换为第 2 次试验时 m_2 , t_2 得

$$\frac{h}{R} = \frac{m_2 g R - M_f}{J_A + m_2 R^2} \cdot \frac{t_2^2}{2} \quad (2)$$

式 (1)、(2) 联立，解得

$$J_A = 1060 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M_f = 6.02 \text{ N} \cdot \text{m}$$

12-9 如图 12-9a 所示通风机的转动部分以初角速度 ω_0 绕中心轴转动，空气的阻力矩与角速度成正比，即 $M = k\omega$ ，其中 k 为常数。如转动部分对其轴的转动惯量为 J ，问经过多少时间其转动角速度减少为初角速度的一半？又在此时间内共转过多少转？

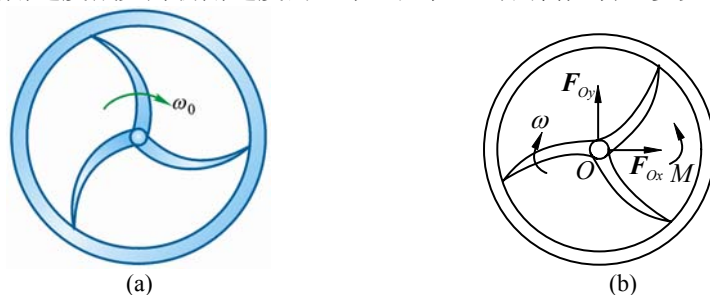


图 12-9

解 以通风机的转动部分为研究对象，应用动量矩定理得

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = -M, \quad M = k\omega$$

分离变量

$$J \frac{d\omega}{\omega} = -k dt$$

上式积分

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} J \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -k dt \quad (1)$$

解得

$$t = \frac{J}{k} \ln 2$$

再对式 (1) 积分，将等式左边积分上限改为 ω ，得

$$\int_{\omega_0}^{\omega} J \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -k dt$$

解得

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$$

即

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$$

$$\theta = \int_0^t \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t} dt = \frac{J\omega_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{J}t})$$

把 $t = \frac{J}{k} \ln 2$ 代入，得

$$\theta = \frac{J\omega_0}{k} (1 - e^{-\ln 2})$$

$$e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{J\omega_0}{2k}$$

最后得转动部分共转过圈数

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{J\omega_0}{4\pi k}$$

12-10 如图 12-10 所示离心式空气压缩机的转速 $n = 8\,600 \text{ r/min}$, 体积流量 $q_V = 370 \text{ m}^3/\text{min}$, 第 1 级叶轮气道进口直径为 $D_1 = 0.355 \text{ m}$, 出口直径为 $D_2 = 0.6 \text{ m}$. 气流进口绝对速度 $v_1 = 109 \text{ m/s}$, 与切线成角 $\theta_1 = 90^\circ$; 气流出口绝对速度 $v_2 = 183 \text{ m/s}$, 与切线成角 $\theta_2 = 21^\circ 30'$. 设空气密度 $\rho = 1.16 \text{ kg/m}^3$, 求这 1 级叶轮的转矩。

解 取气流进行研究, 气流以 v_1 速度进入气道, 一段时间后以 v_2 速度流出, 用动量矩定理对转动轴 O 的投影式, 有

$$\frac{dL_O}{dt} = M$$

参照教材例 12-2 解的结果得

$$M = \rho \frac{q_V}{60} \left(\frac{D_2}{2} v_2 \cos \theta_2 - \frac{D_1}{2} v_1 \cos \theta_1 \right)$$

即

$$M = \frac{\rho D_2 q_V}{120} v_2 \cos \theta_2 = \left(\frac{1.16 \times 0.6 \times 370}{120} \times 183 \cos 21^\circ 30' \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 365 \text{ N} \cdot \text{m}$$

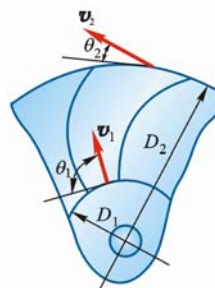


图 12-10

12-11 均质圆轮 A 质量为 m_1 , 半径为 r_1 , 以角速度 ω 绕杆 OA 的 A 端转动, 此时将轮放置在质量为 m_2 的另 1 均质圆轮 B 上, 其半径为 r_2 , 如图 12-11a 所示。轮 B 原为静止, 但可绕其中心自由转动。放置后, 轮 A 的重量由轮 B 支持。略去轴承的摩擦和杆 OA 的重量, 并设两轮间的摩擦因数为 f . 问自轮 A 放在轮 B 上到两轮间没有相对滑动为止, 经过多少时间?

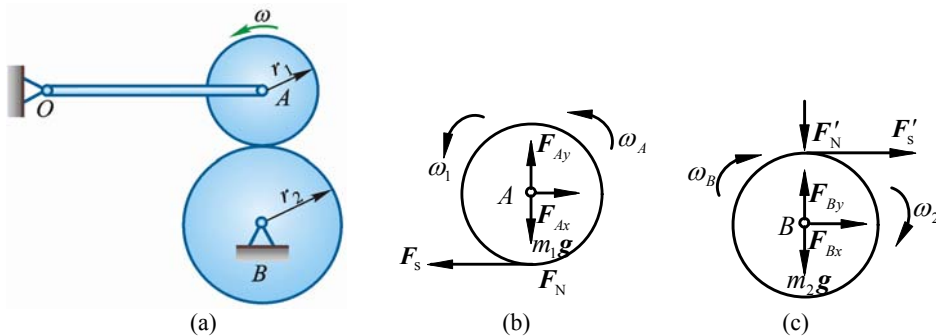


图 12-11

解 分别取轮 A 、 B 为研究对象, 其受力和运动分析如图 12-11b、12-11c 所示, 根据刚体绕定轴转动的微分方程式, 对轮 A 、 B 分别有

$$J_1 \frac{d\omega_A}{dt} = -Fr_1$$

$$J_2 \frac{d\omega_B}{dt} = F'r_2$$

分离变量并积分

$$J_1 \int_{\omega}^{\omega_1} d\omega_A = -Fr_1 \int_0^t dt$$

$$J_2 \int_{\omega}^{\omega_2} d\omega_B = F'r_2 \int_0^t dt$$

得到

$$J_1\omega_1 - J_1\omega = -Fr_1t$$

$$J_2\omega_2 = F'r_2t$$

由题意知

$$\omega_1 : \omega_2 = r_2 : r_1$$

将其代入以上两式，联立求解得

$$\frac{J_1\omega - Fr_1t}{F'r_2t} = \frac{J_1r_2}{J_2r_1}$$

注意到

$$J_1 = \frac{m_1r_1^2}{2}, J_2 = \frac{m_2r_2^2}{2}, F = F' = F_N = fm_1g$$

代入上式解得

$$t = \frac{\omega r_1}{2fg(1 + \frac{m_1}{m_2})}$$

12-12 为求刚体对于通过重心 G 的轴 AB 的转动惯量，用两杆 AD , BE 与刚件牢固连接，并借两杆将刚体活动地挂在水平轴 DE 上，如图 12-12a 所示。轴 AB 平行于 DE ，然后使刚体绕轴 DE 作微小摆动，求出振动周期 T 。如果刚体的质量为 m ，轴 AB 与 DE 间的距离为 h ，杆 AD 和 BE 的质量忽略不计。求刚体对轴 AB 的转动惯量。

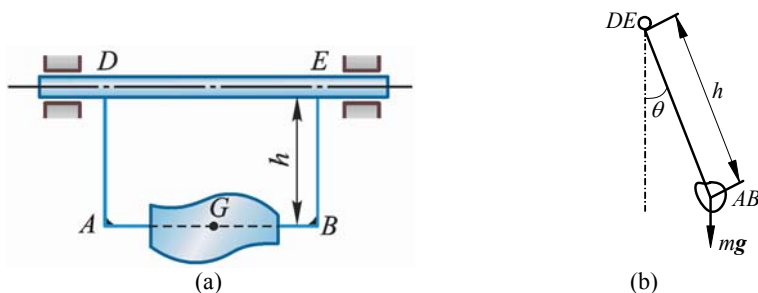


图 12-12

解 取刚体系统为研究对象，设刚体离开平衡位置转过 1 微小角度 θ ，由刚体绕定轴转动的微分方程式有

$$J_{DE}\ddot{\theta} = -mgh\sin\theta \quad (1)$$

由于 θ 很小，有

$$\sin\theta \approx \theta$$

且令 $k^2 = \frac{mgh}{J_{DE}}$

式 (1) 化为

$$\ddot{\theta} + k^2\theta = 0$$

得该系统自由振动的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{DE}}{mgh}}$$

$$J_{DE} = \frac{mghT^2}{4\pi^2}$$

由刚体转动惯量的平行移轴定理有

$$J_{DE} = J_{AB} + mh^2$$

将 J_{DE} 值代入解得

$$J_{AB} = mg \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{h}{g} \right)$$

12-13 如图 12-13a 所示，有 1 轮子，轴的直径为 50 mm，无初速地沿倾角 $\theta = 20^\circ$ 的轨道滚下，设只滚不滑，5 秒内轮心滚动的距离为 $s = 3$ m。求轮子对轮心的惯性半径。

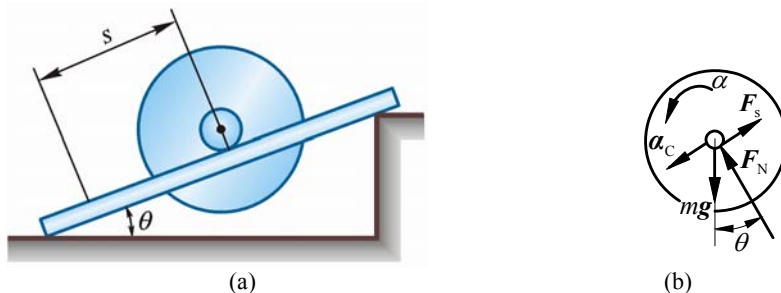


图 12-13

解 取轮子为研究对象，轮子受力如图 12-13b 所示，根据刚体平面运动微分方程有

$$ma_C = mg \sin \theta - F \quad (1)$$

$$J_C \alpha = Fr \quad (2)$$

因轮子只滚不滑，所以有

$$a_C = \alpha r \quad (3)$$

式 (3) 代入式 (1), (2)，消去 F 得

$$\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{mr \sin \theta}{J_C + mr^2} g$$

上式对时间 2 次积分，并注意到 $t = 0$ 时 $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ ，则

$$\varphi = \frac{mgrt^2 \sin \theta}{2(J_C + mr^2)} = \frac{mgrt^2 \sin \theta}{2(m\rho^2 + mr^2)} = \frac{grt^2 \sin \theta}{2(\rho^2 + r^2)}$$

把 $r = 0.025$ m 及 $t = 5$ s 时， $s = r\varphi = 3$ m 代入上式得

$$\rho = r \sqrt{\frac{gt^2 \sin \theta}{2s} - 1} = \left(0.025 \sqrt{\frac{9.8 \times 5^2 \sin 20^\circ}{2 \times 3} - 1} \right) \text{ m} = 0.09 \text{ m} = 90 \text{ mm}$$

12-14 重物 A 质量为 m_1 ，系在绳子上，绳子跨过不计质量的固定滑轮 D ，并绕在鼓轮 B 上，如图 12-14a 所示。由于重物下降，带动了轮 C ，使它沿水平轨道滚动而不滑动。设鼓轮半径为 r ，轮 C 的半径为 R ，两者固结在一起，总质量为 m_2 ，对于其水平轴 O 的回转半径为 ρ 。求重物 A 的加速度。

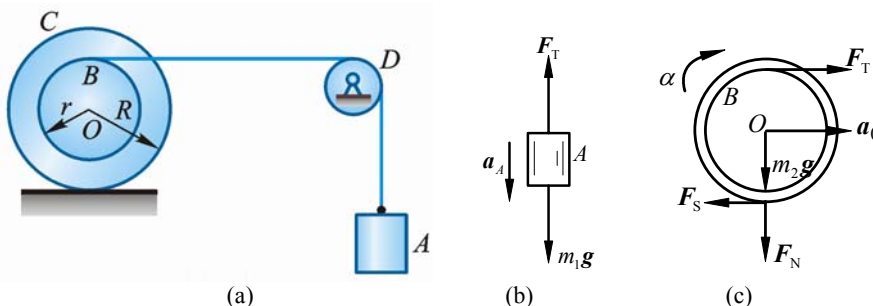


图 12-14

解 分别取重物 A 和鼓轮 B 为研究对象，其受力和运动分析如图 12-14b、12-14c 所示。重物 A 的运动微分方程：

$$m_1 a_A = m_1 g - F_T \quad (1)$$

轮 B 作平面运动，其运动微分方程为

$$m_2 a_O = F_T - F \quad (2)$$

$$m_2 \rho^2 \alpha = F_T r + FR \quad (3)$$

由于轮子只滚不滑，故有

$$\alpha R = a_O \quad (4)$$

$$a_A = a_B = (R + r) \alpha \quad (5)$$

式 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 联立求解，得

$$a_A = \frac{m_1 g (r + R)^2}{m_1 (R + r)^2 + m_2 (\rho^2 + R^2)}$$

12-15 如图 12-15a 所示 2 小球 A 和 B ，质量分别为 $m_A = 2 \text{ kg}$ ， $m_B = 1 \text{ kg}$ ，用 $AB = l = 0.6 \text{ m}$ 的杆连接。在初瞬时，杆在水平位置， B 不动，而 A 的速度 $v_A = 0.6\pi \text{ m/s}$ ，方向铅直向上，如图 12-15a 所示。杆的质量和球的尺寸忽略不计。求：(1) 2 小球在重力作用下的运动；(2) 在 $t = 2 \text{ s}$ 时，2 小球相对于定坐标系 Oxy 的位置；(3) $t = 2 \text{ s}$ 时杆轴线方向的内力。

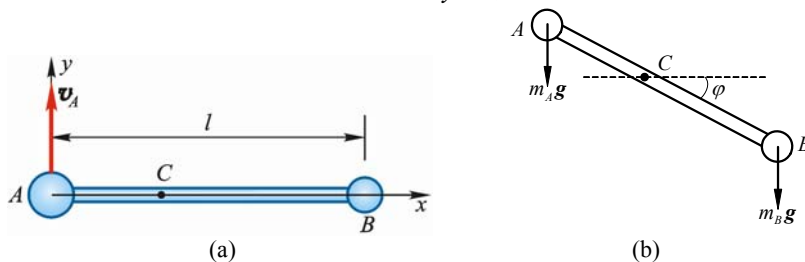


图 12-15

解 取球 A 、 B 和连杆进行研究，系统只受重力作用，定坐标系 Oxy ，其坐标原点 O 取在运动开始前系统的质心点 C 上，如图 12-15b 所示。由于

$$m_A/m_B = 2/1$$

所以

$$AC/BC = 1/2$$

$$AC = 0.2 \text{ m}$$

$$BC = 0.4 \text{ m}$$

(1) 由于系统水平方向不受外力，且开始时系统静止，所以系统质心 C 的坐标

$$x_C = AC = 0.2 \text{ m}$$

又由于对质心 C 的外力矩之和为零，系统对质心 C 的动量矩守恒，由此得

$$m_A v_A \cdot AC = [m_A \cdot (AC)^2 + m_B \cdot (BC)^2] \omega$$

代入数据解得

$$\omega = \pi$$

$$\varphi = \pi t$$

由质心运动定理 $Ma_C = F$ 在 y 方向投影式

$$Ma_{Cy} = \sum F_y \quad (1)$$

式中， $a_{Cy} = \ddot{y}_C$ ， $m = m_A + m_B$ ， $\sum F_y = -(m_A + m_B)g$

代入式 (1)，并对时间 2 次积分，得

$$y_C = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

由初始条件知 $t = 0$ 时，

$$\dot{y}_C = \frac{BC}{AB} \cdot v_A = 0.4\pi \text{ m/s}, \quad y_C = 0$$

求得 $c_1 = 0.4\pi$ ， $c_2 = 0$

$$y_C = \left(0.4\pi t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ m} \right)$$

两小球的运动可由两小球与杆 AB 组成系统的平面运动方程表达：

$$\begin{cases} x_C = 0.2 \text{ m} \\ y_C = 0.4\pi t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \varphi = \pi t \end{cases}$$

(2) $t = 2 \text{ s}$ 时, $\varphi = \pi t = 2\pi \text{ rad}$

$$y_C = -17.1 \text{ m}$$

由此可见两球与杆所组成的系统所占有位置与初始位置平行, 仅向下移动了 17.1 m 的距离。

(3) $t = 2 \text{ s}$ 时, 杆轴线方向的内力为拉力, 由于

$$\omega = \dot{\varphi} = \pi \text{ rad/s}$$

故其大小为

$$F_T = m_A \omega^2 \cdot AC = m_B \omega^2 \cdot BC = (2 \cdot \pi^2 \cdot 0.2) \text{ N} = 3.95 \text{ N}$$

12-16 均质圆柱体 A 的质量为 m , 在外圆上绕以细绳, 绳的 1 端 B 固定不动, 如图 12-16a 所示。圆柱体因解开绳子而下降, 其初速为零。求当圆柱体的轴心降落了高度 h 时轴心的速度和绳子的张力。

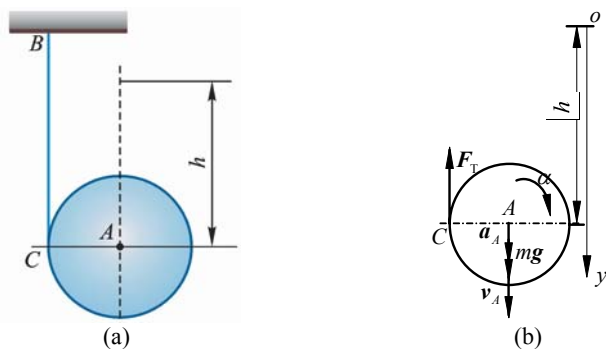


图 12-16

解 取均质圆柱体 A 为研究对象, 其受力如图 12-16b 所示, 根据刚体平面运动微分方程有

$$ma_A = mg - F_T \quad (1)$$

$$J_A \alpha = F_T R \quad (\text{设轮 } A \text{ 半径为 } R) \quad (2)$$

由题意知

$$a_A = R\alpha$$

代入式 (1)、式 (2) 解得

$$F_T = \frac{1}{3}mg \text{ (拉)}$$

$$\alpha = \frac{2g}{3R} \text{ (顺)}$$

$$a_A = \alpha R = \frac{2}{3}g \text{ (}\downarrow\text{)}$$

由于加速度 a_A 为常量, 由运动学公式知

$$v_A = \sqrt{2a_A h} = \frac{2}{3}\sqrt{3gh} \text{ (}\downarrow\text{)}$$

12-17 如图 12-17a 所示均质杆 AB 长为 l , 放在铅直平面内, 杆的 1 端 A 靠在光滑铅直墙上, 另 1 端 B 放在光滑的水平地板上, 并与水平面成 φ_0 角。此后, 令杆由静止状态倒下。求 (1) 杆在任意位置时的角加速度和角速度; (2) 当杆脱离墙时, 此杆与水平面所夹的角。

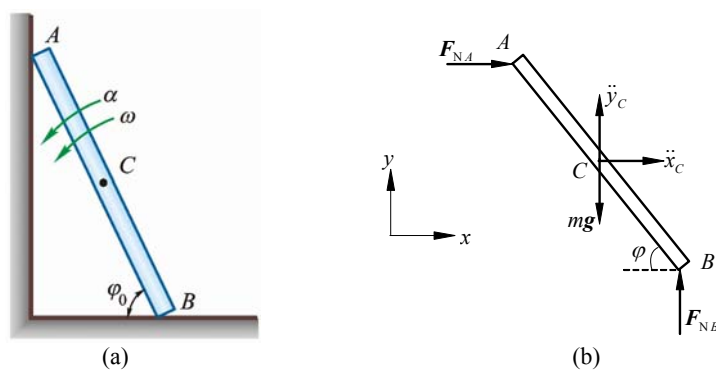


图 12-17

解 (1) 取均质杆为研究对象，受力及坐标系 Oxy 如图 12-17b 所示，杆 AB 作平面运动，质心在点 C 。刚体平面运动微分方程为

$$m\ddot{x}_C = F_{NA} \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = F_{NB} - mg \quad (2)$$

$$J_C\alpha = F_{NB} \cdot \frac{l}{2}\cos\varphi - F_{NA} \cdot \frac{l}{2}\sin\varphi \quad (3)$$

由于
$$x_C = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$y_C = \frac{l}{2}\sin\varphi$$

将其对时间 t 求 2 次导数，且注意到

$$\dot{\varphi} = -\omega$$

$$\ddot{\varphi} = -\alpha$$

得

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi) \quad (4)$$

$$\ddot{y}_C = \frac{-l}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi) \quad (5)$$

式 (4)、式 (5) 代入式 (1)、式 (2)，得

$$F_{NA} = \frac{ml}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi)$$

$$F_{NB} = \frac{-ml}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi) + mg$$

再将 F_{NA} , F_{NB} 的表达式代入式 (3) 中，得

$$J_C\alpha = -\frac{ml^2}{4}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi)\cos\varphi + \frac{mgl}{2}\cos\varphi - \frac{ml^2}{4}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi)\sin\varphi$$

即

$$J_C\alpha = -\frac{ml^2}{4}\alpha + \frac{mgl}{2}\cos\varphi$$

把 $J_C = \frac{ml^2}{12}$ 代入上式得

$$\alpha = \frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

而

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

分离变量并积分得

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_{\varphi_0}^{\varphi} -\frac{3g}{2l} \cos \varphi d\varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}$$

(2) 当杆脱离墙时 $F_{NA} = 0$, 设此时 $\varphi = \varphi_1$, 则

$$F_{NA} = \frac{ml}{2} (\alpha \sin \varphi_1 - \omega^2 \cos \varphi_1) = 0$$

将 α 和 ω 表达式代入上式解得

$$\sin \varphi_1 = \frac{2}{3} \sin \varphi_0, \quad \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3} \sin \varphi_0\right)$$

12-18 如图 12-18a 所示, 板的质量为 m_1 , 受水平力 F 作用, 沿水平面运动, 板与平面间的动摩擦因数为 f . 在板上放 1 质量为 m_2 的均质实心圆柱, 此圆柱对板只滚动而不滑动. 求板的加速度。

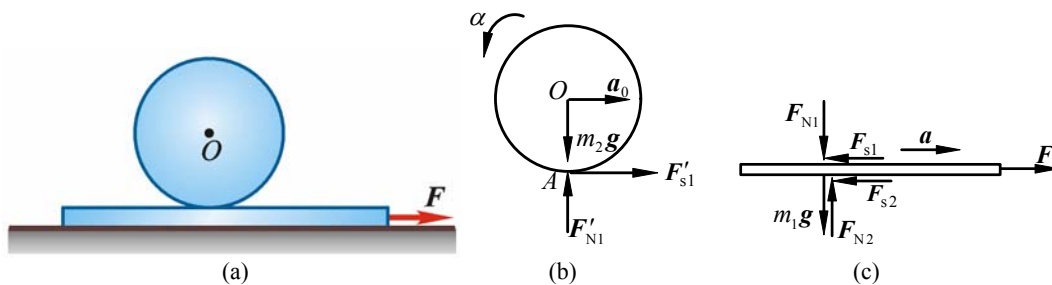


图 12-18

解 先取圆柱为研究对象, 其受力和运动分析如图 12-18b 所示, 根据刚体平面运动微分方程有

$$m_2 a_O = F'_1 \quad (1)$$

$$0 = F'_{N1} - m_2 g \quad (2)$$

$$J\alpha = F'_1 \cdot r \quad (3)$$

以圆柱与平板的接触点 A 为基点 (其加速度由只滚不滑条件知应等于平板加速度 a), 研究点 O 的加速度, 有如下关系

$$a_O = a - r\alpha$$

代入式 (1) 有

$$m_2 (a - r\alpha) = F'_1 \quad (4)$$

式 (3)、式 (4) 联立, 并注意

$$J = \frac{m_2 r^2}{2}$$

解得

$$F'_1 = \frac{m_2 a}{3} \quad (5)$$

再以平板为研究对象, 其受力和运动分析如图 12-18c 所示. 由质心运动定理

$$m_1 a = F - F_1 - F_2 \quad (6)$$

$$0 = F_{N2} - m_1 g - F_{N1} \quad (7)$$

$$F_2 = fF_{N2} \quad (8)$$

式 (5)、式 (8) 代入式 (6)、式 (7)，解得

$$a = \frac{F - f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 / 3} g$$

12-19 均质实心圆柱体 A 和薄铁环 B 的质量均为 m ，半径都等于 r ，两者用杆 AB 铰接，无滑动地沿斜面滚下，斜面与水平面的夹角为 θ ，如图 12-19a 所示。如杆的质量忽略不计，求杆 AB 的加速度和杆的内力。

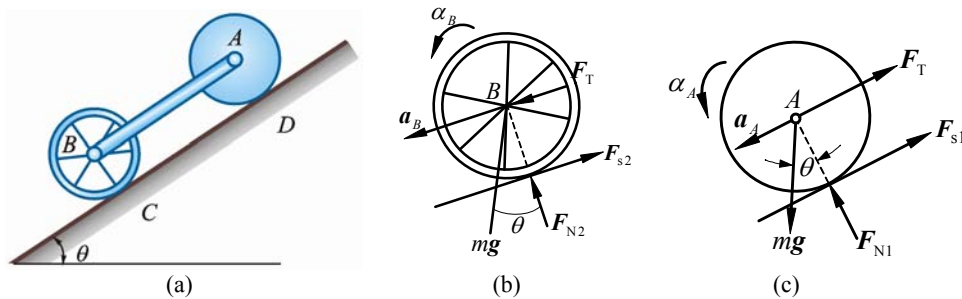


图 12-19

解 分别取圆柱 A 和薄铁环 B 为研究对象，其受力如图 12-19b、12-19c 所示； A 和 B 均作平面运动，杆 AB 作平移，由题意知

$$\alpha_A = \alpha_B = \alpha$$

$$a_A = a_B = a$$

对圆柱 A 有

$$ma = mg \sin \theta - F_T - F_1 \quad (1)$$

$$F_1 r = J_A \alpha \quad (2)$$

对薄铁环 B 有

$$ma = F_T' + mg \sin \theta - F_2 \quad (3)$$

$$F_2 r = J_B \alpha \quad (4)$$

$$J_A = \frac{m}{2} r^2, J_B = mr^2 \quad (5)$$

由只滚不滑条件得

$$a = \alpha r \quad (6)$$

式 (1)、式 (2)、式 (3)、式 (4)、式 (5)、式 (6) 联立，解得

$$F_T = F_T' = \frac{1}{7} mg \sin \theta \quad (\text{压})$$

$$a = \frac{4}{7} g \sin \theta$$

12-20 半径为 r 的均质圆柱体的质量为 m ，放在粗糙的水平面上，如图 12-20a 所示。设其中心 C 初速度为 v_0 ，方向水平向右，同时圆柱如图所示方向转动，其初角速度为 ω_0 ，且有 $\omega_0 r < v_0$ 。如圆柱体与水平面的摩擦因数为 f ，问经过多少时间，圆柱体才能只滚不滑地向前运动，并求该瞬时圆柱体中心的速度。

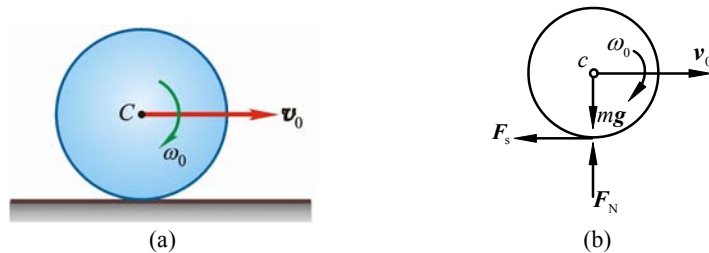


图 12-20

解 取圆柱体为研究对象，受力和运动分析如图 12-20b 所示。根据刚体平面运动微分

$$\text{方程有 } m \frac{dv}{dt} = -F \quad (1)$$

$$J_C \frac{d\omega}{dt} = Fr \quad (2)$$

$$J_C = \frac{m}{2} r^2 \quad (3)$$

式 (1)、式 (2)、式 (3) 联立，消去 F 得

$$dv = -\frac{r}{2} d\omega$$

上式积分

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= \int_{\omega_0}^{\omega} -\frac{r}{2} d\omega \\ v &= v_0 + \frac{r}{2} \omega_0 - \frac{r}{2} \omega \end{aligned} \quad (4)$$

圆柱只滚不滑时，有

$$v = \omega r$$

代入式 (4)，得

$$v = \frac{2v_0 + r\omega_0}{3} \quad (5)$$

由于圆柱在铅直方向无加速度，故

$$F_N = mg$$

在达到只滚不滑以前（即处于动滑动状态时）

$$F = f F_N = f mg$$

代入式 (1)，得

$$dv = -g f dt$$

积分得

$$t = \frac{v_0 - v}{g f}$$

式(5)代入上式，得

$$t = \frac{v_0 - r\omega_0}{3fg}$$

12-21 如图 12-21a 所示均质圆柱体的质量为 m ，半径为 r ，放在倾角为 60° 的斜面上。1 细绳缠绕在圆柱体上，其 1 端固定于点 A ，此绳与 A 相连部分与斜面平行。若圆柱体与斜面间的摩擦因数为 $f = \frac{1}{3}$ ，求其中心沿斜面落下的加速度 a_C 。

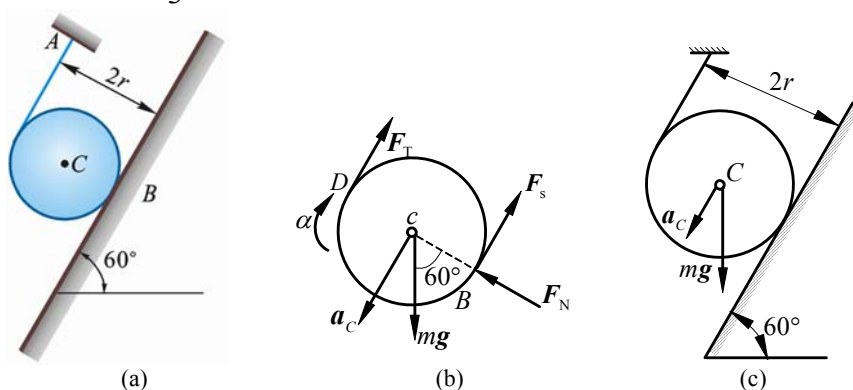


图 12-21

解 取均质圆柱为研究对象，受力如图 12-21b 所示；圆柱作平面运动，其平面运动微

分方程为

$$J\alpha = (F_T - F)r \quad (1)$$

$$0 = F_N - mg \cos 60^\circ \quad (2)$$

$$ma_C = mg \sin 60^\circ - F_T - F \quad (3)$$

$$\text{且 } F = fF_N \quad (4)$$

圆柱沿斜面向下滑动, 可看作沿绳 AD 向下滚动, 且只滚不滑, 所以有

$$a_C = \alpha r \quad (5)$$

$$f = \frac{1}{3}$$

式 (1) ~ (5) 联立, 解得

$$a_C = 0.355g \quad (\text{方向沿斜面向下})$$

12-22 A, B 两轮质量皆为 m , 对各自轮心的转动惯量皆为 mr^2 , 且有 $R = 2r$, 如图 12-22a 所示。小定滑轮 C 及绕于两轮上的细绳质量不计, 轮 B 沿斜面只滚不滑。求 A, B 两轮心的加速度。

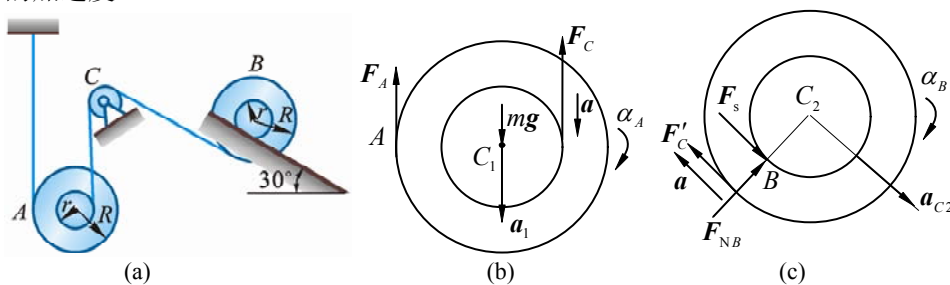


图 12-22

解 (1) 图 12-22b 中, 瞬心 A 与质心 C_1 之距不变, 故可用相对瞬心动量矩定理有

$$J_A \alpha_A = mg \cdot 2r - F_C \cdot 3r \quad (1)$$

(2) 图 12-22c 中, 瞬心 B 与质心 C_2 之距不变, 故有

$$J_B \alpha_B = F_C \cdot r + mg \sin 30^\circ \cdot r \quad (2)$$

$$J_A = mr^2 + m(2r)^2 = 5mr^2 \quad (3)$$

$$J_B = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 \quad (4)$$

$$a = 3r\alpha_A = r\alpha_B, \quad \alpha_B = 3\alpha_A \quad (5)$$

式 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 联立, 解得

$$\alpha_A = \frac{7}{46} \cdot \frac{g}{r}, \quad \alpha_B = \frac{21}{46} \cdot \frac{g}{r}$$

$$a_B = r\alpha_B = \frac{21}{46}g$$

12-23 均质圆柱体 A 和 B 的质量均为 m , 半径为 r , 1 绳缠在绕固定轴 O 转动的圆柱 A 上, 绳的另一端绕在圆柱 B 上, 如图 12-23a 所示。摩擦不计。求: (1) 圆柱体 B 下落时质心的加速度; (2) 若在圆柱体 A 上作用 1 逆时针转向, 矩为 M 的力偶, 问在什么条件下圆柱体 B 的质心加速度将向上。

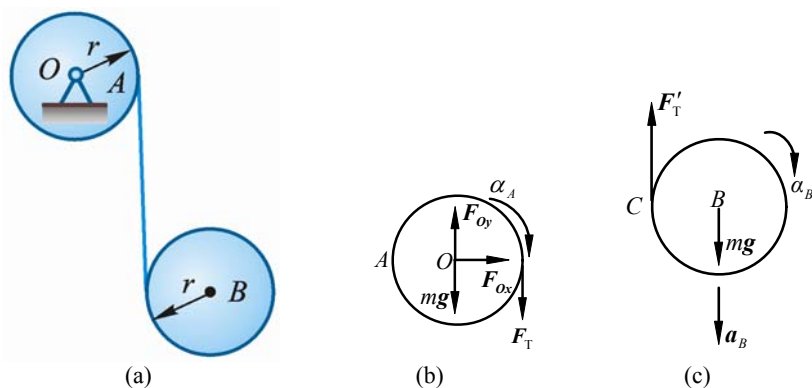


图 12-23

解 (1) 分别取轮 A 和 B 研究, 其受力如图 12-23b、12-23c 所示; 轮 A 定轴转动, 轮 B 作平面运动。

对轮 A 运用刚体绕定轴转动微分方程

$$J_A \alpha_A = F_T r \quad (1)$$

对轮 B 运用刚体平面运动微分方程有

$$mg - F'_T = ma_B \quad (2)$$

$$J_B \alpha_B = F'_T r \quad (3)$$

再以 C 为基点分析点 B 加速度, 有

$$a_B = a_C + a_{BC} = \alpha_A \cdot r + \alpha_B \cdot r \quad (4)$$

$$J_B = J_A = \frac{m}{2} r^2$$

式 (1)、式 (2)、式 (3)、式 (4) 联立, 解得

$$a_B = \frac{4}{5} g$$

(2) 若在轮 A 上作用 1 逆时针转矩 M , 则轮 A 将作逆时针转动, 对 A 运用刚体绕定轴转动微分方程有

$$J_A \alpha_A = M - F_T r \quad (5)$$

$$J_B = J_A = \frac{m}{2} r^2$$

以点 C 为基点, 分析点 B 的加速度。根据题意, 在临界状态有

$$a_B = a_C^t + a_{BC}^t = -\alpha_A r + \alpha_B r = 0 \quad (6)$$

式 (5)、式 (6)、式 (2)、式 (3) 联立, 解得

$$M = 2mgr$$

故当转矩 $M > 2mgr$ 时轮 B 的质心将上升。

12-24 如图 12-24a 所示, 质量 $m = 3 \text{ kg}$ 且长度 $ED = EA = 200 \text{ mm}$ 的直角弯杆, 在点 D 铰接于加速度运动的板上。为了防止杆的转动, 在板上 A, B 两点固定两个光滑螺栓, 整个系统位于铅垂面内, 板沿直线轨道运动。

(1) 若板的加速度 $a = 2g$ (g 为重力加速度), 求螺栓 A 或 B 及铰 D 给予弯杆的力;

(2) 若弯杆在 A, B 处均不受力, 求板的加速度 a 及铰 D 给与弯杆的力。

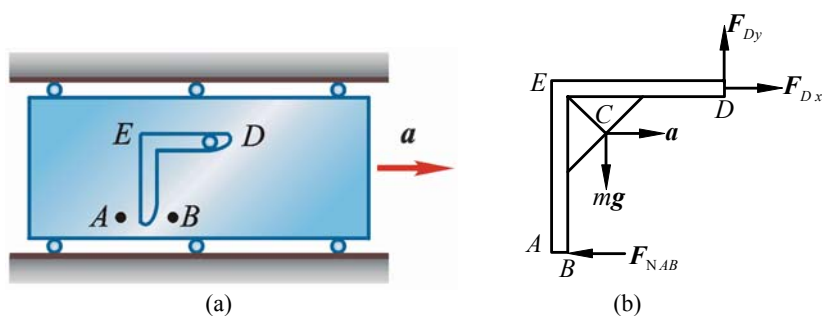


图 12-24

解 (1) 研究对象受力及加速度分析如图 12-24b 所示

$$F_{Dx} - F_{NAB} = ma \quad (1)$$

$$F_{Dy} = mg \quad (2)$$

$$\alpha = 0$$

$$\sum Mc = 0, \quad F_{Dy} \times \frac{3}{4} \times 0.2 - F_{Dx} \times \frac{1}{4} \times 0.2 - F_{NAB} \times \frac{3}{4} \times 0.2 = 0$$

即 $3F_{Dy} - F_{Dx} - 3F_{NAB} = 0 \quad (3)$

式 (1)、式 (2)、式 (3) 联立, 解得 (由 $a = 2g$)

$$\begin{cases} F_{Dy} = 29.4 \text{ N} \\ F_{Dx} = 66.2 \text{ N} \\ F_{NAB} = 7.35 \text{ N} \end{cases}$$

(2) 若要 $F_{NAB} = 0$, 则

$$\begin{cases} F_{Dx} = ma \\ F_{Dy} = mg \\ 3F_{Dy} - F_{Dx} = 0 \end{cases}$$

$$F_{Dx} = 3mg = 88.2 \text{ N}$$

$$a = 3g$$

$$F_{Dy} = 29.4 \text{ N}$$

第 13 章 动能定理

13-1 如图 13-1a 所示, 圆盘的半径 $r = 0.5 \text{ m}$, 可绕水平轴 O 转动。在绕过圆盘的绳上吊有两物块 A 、 B , 质量分别为 $m_A = 3 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$ 。绳与盘之间无相对滑动。在圆盘上作用 1 力偶, 力偶矩按 $M = 4\varphi$ 的规律变化 (M 以 $\text{N} \cdot \text{m}$ 计, φ 以 rad 计)。求由 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = 2\pi$ 时, 力偶 M 与物块 A 、 B 重力所作的功之总和。

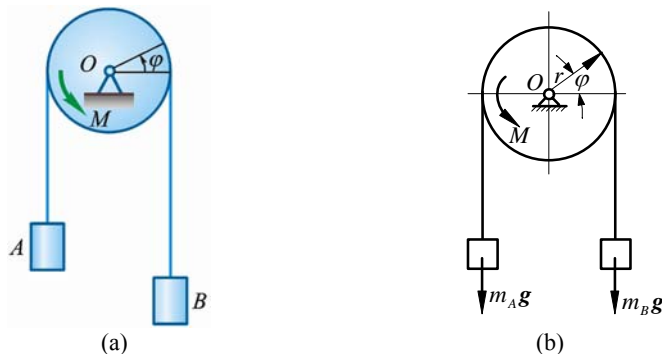


图 13-1

解 轴承处约束力 (图 13-1b 中未画出) 为理想约束力, 不做功。做功的力和力偶矩有 M , $m_A g$, $m_B g$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} 4\varphi d\varphi + (m_A - m_B)g \cdot 2\pi r = 8\pi^2 + (m_A - m_B)g \cdot 2\pi r \\ &= (8\pi^2 + 1 \times 9.8 \times 2\pi \times 0.5) \text{ J} = 110 \text{ J} \end{aligned}$$

13-2 如图 13-2a 所示, 用跨过滑轮的绳子牵引质量为 2 kg 的滑块 A 沿倾角为 30° 的光滑斜槽运动。设绳子拉力 $F = 20 \text{ N}$ 。计算滑块由位置 A 至位置 B 时, 重力与拉力 F 所作的总功。

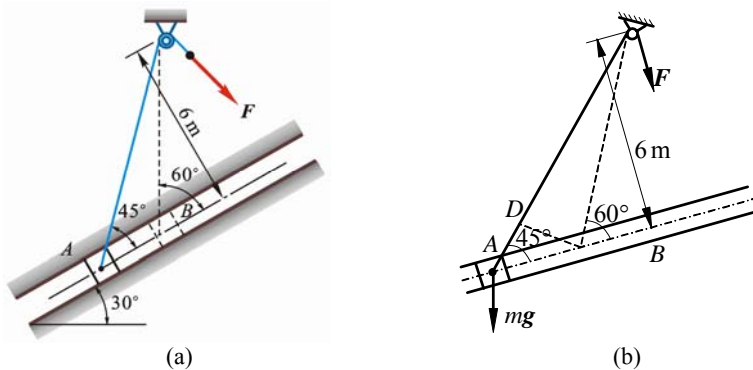


图 13-2

解 在图 13-b 中, 理想约束力未画出。做功力有 F , mg 。

$$l_{AB} = 6 \cot 45^\circ - 6 \cot 60^\circ = \left[6 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \text{ m} = 2.54 \text{ m}, \quad \overline{CD} = \overline{CB}$$

$$l_{AD} = \frac{6}{\sin 45^\circ} - \frac{6}{\sin 60^\circ} = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left[12 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \text{ m} = 1.56 \text{ m}$$

$$W = F \cdot l_{AD} - mg \cos 60^\circ \cdot l_{AB} = \left(20 \times 1.557 - 2 \times 9.8 \times \frac{1}{2} \times 2.536 \right) \text{ J} = 6.29 \text{ J}$$

13-3 图 13-3a 所示坦克的履带质量为 m , 两个车轮的质量均为 m_1 。车轮被看成均质圆盘, 半径为 R , 两车轮间的距离为 πR 。设坦克前进速度为 v , 计算此质点系的动能。

解 系统的动能为履带动能和车轮动能之和。将履带分为 4 部分, 如图 13-3b 所示。履带动能:

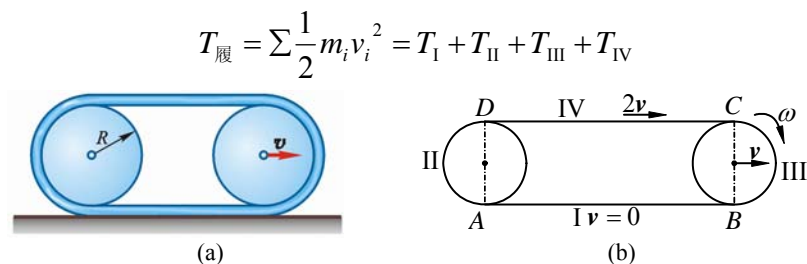


图 13-3

由于 $v_I = 0, v_{IV} = 2v$ ，且由于每部分履带长度均为 πR ，因此

$$m_I = m_{II} = m_{III} = m_{IV} = \frac{m}{4}$$

$$T_I = \frac{1}{2} m_I v_I^2 = 0$$

$$T_{IV} = \frac{1}{2} m_{IV} v_{IV}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{m}{4} (2v)^2 = \frac{m}{2} v^2$$

II、III 段可合并看作 1 滚环，其质量为 $\frac{m}{2}$ ，转动惯量为 $J = \frac{m}{2} R^2$ ，质心速度为 v ，角速度为 $\omega = \frac{v}{R}$ ，则

$$T_{II} + T_{III} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{mv^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{m}{2} v^2$$

$$T_{\text{履}} = 0 + \frac{m}{2} v^2 + \frac{m}{2} v^2 = mv^2$$

轮动能

$$T_{\text{轮}} = 2T_{\text{轮1}} = 2 \left[\frac{m_1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{2} R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} \right] = \frac{3}{2} m_1 v^2$$

则系统动能

$$T = T_{\text{履}} + T_{\text{轮}} = mv^2 + \frac{3}{2} m_1 v^2$$

13-4 长为 l ，质量为 m 的均质杆 OA 以球铰链 O 固定，并以等角速度 ω 绕铅直线转动，如图 13-4a 所示。如杆与铅直线的交角为 θ ，求杆的动能。

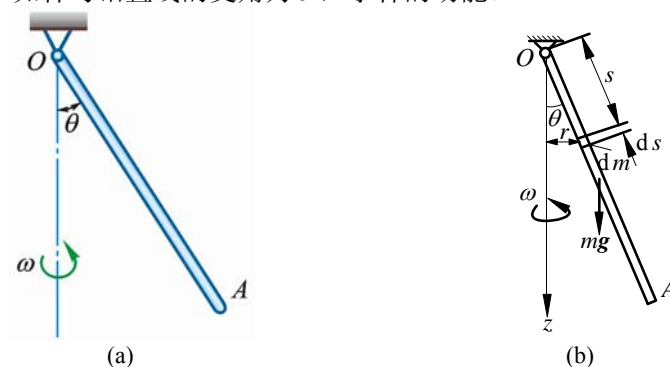


图 13-4

解 由刚体绕定轴转动的动能，得杆的动能

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

其中（图 13-4b）

$$J_z = \int r^2 dm = \int_0^l \frac{ms^2 \sin^2 \theta}{l} ds = \frac{ml^2}{3} \sin^2 \theta$$

代入上式得

$$T = \frac{m}{6} \omega^2 l^2 \sin^2 \theta$$

13-5 自动弹射器如图 13-5a 放置，弹簧在未受力时的长度为 200 mm，恰好等于筒长。欲使弹簧改变 10 mm，需力 2 N。如弹簧被压缩到 100 mm，然后让质量为 30 g 的小球自弹射器中射出。求小球离开弹射器筒口时的速度。

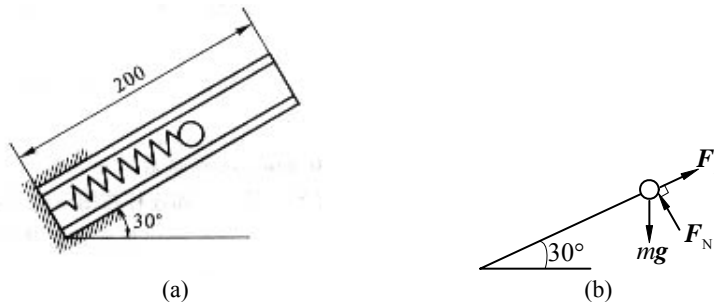


图 13-5

解 由题意得弹簧的刚度系数

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{2 \text{ N}}{0.01 \text{ m}} = 200 \text{ N/m}$$

弹射过程中，弹性力功

$$W_1 = \frac{1}{2} k (\delta_0^2 - \delta_1^2) = \left[\frac{1}{2} \times 200 (0.1^2 - 0) \right] \text{ J} = 1 \text{ J}$$

重力功

$$W_2 = -mg \sin 30^\circ [0.2 - 0.1] = -0.0147 \text{ J}$$

动能

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 0.03 v^2$$

由动能定理知

$$W_1 + W_2 = T_2 - T_1$$

将有关量代入，得

$$1 \text{ J} - 0.0147 \text{ J} = \frac{1}{2} \times 0.03 \text{ kg} \cdot v^2 - 0$$

$$v = 8.1 \text{ m/s}$$

13-6 如图 13-6 所示冲床冲压工件时冲头受的平均工作阻力 $F = 52 \text{ kN}$ ，工作行程 $s = 10 \text{ mm}$ 。飞轮的转动惯量 $J = 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，转速 $n = 415 \text{ r/min}$ 。假定冲压工件所需的全部能量都由飞轮供给，计算冲压结束后飞轮的转速。

解 由质点系动能定理

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

且

$$T_2 = \frac{1}{2} J \omega_2^2$$

$$W_{12} = -Fs$$

有关数据代入式 (1)，得

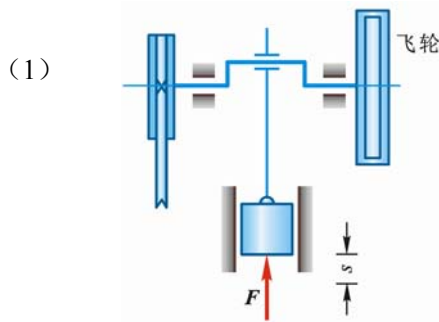


图 13-6

$$\frac{1}{2} \times 40 \omega_2^2 - \frac{1}{2} \times 40 \times \left(\frac{2\pi}{60} \times 415 \right)^2 = -52 \times 1000 \times 10 \times 10^{-3}$$

解得

$$\omega_2 = 43.1 \text{ rad/s}$$

故

$$n = \frac{30\omega_2}{\pi} = \left(\frac{30 \times 43.1}{\pi} \right) \text{ r/min} = 412 \text{ r/min}$$

13-7 平面机构由 2 匀质杆 AB , BO 组成, 2 杆的质量均为 m , 长度均为 l , 在铅垂平面内运动。在杆 AB 上作用 1 不变的力偶矩 M , 从图 13-7a 所示位置由静止开始运动。不计摩擦, 求当杆端 A 即将碰到铰支座 O 时杆端 A 的速度。

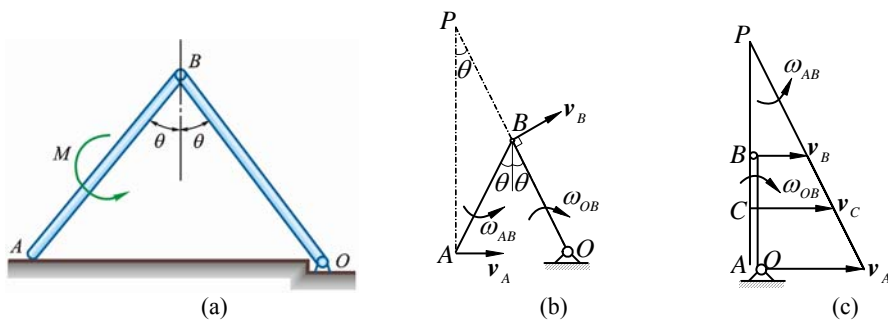


图 13-7

解 杆 OB 作定轴转动, 杆 AB 作平面运动。由图 13-7b 中杆 AB 瞬心 P 和点 B 速度, 得

$$\omega_{AB} = \omega_{OB} = \omega \quad (\text{转向如图 13-7b}) \quad (1)$$

$$v_B = l\omega, \quad v_A = 2l \cos \theta \cdot \omega \quad (2)$$

当 A 即将碰 O 时, $\theta = 0, v_{AB} \parallel v_B$ (图 13-7c), 由式 (2) 得

$$v_A = 2v_B = 2l\omega, \quad v_C = \frac{3}{2}l\omega \quad (\text{图 13-7c}) \quad (3)$$

外力做功

$$W_{12} = M\theta - 2 \cdot mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta)$$

动能

$$T_1 = 0$$

$$\begin{aligned} T_2 &= T_{AB} + T_{OB} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}J_O\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}l\omega\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}ml^2 \cdot \omega^2 = \frac{4}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{3}mv_A^2 \end{aligned}$$

动能定理:

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}mv_A^2 &= M\theta - mgl(1 - \cos \theta) \\ v_A &= \sqrt{\frac{3}{m}[M\theta - mgl(1 - \cos \theta)]} \end{aligned}$$

讨论: 可能出现的解答错误是认为 A 即将碰 O 时, A, B 两点速度平行而误认为杆 AB 作瞬时平移, 从而将系统动能算错。

13-8 链条全长 $l = 1 \text{ m}$, 单位长度质量为 $\rho = 2 \text{ kg/m}$, 悬挂在半径为 $R = 0.1 \text{ m}$, 质量 $m = 1 \text{ kg}$ 的滑轮上, 在图 13-8a 所示位置自静止开始下落 (给以初始扰动)。设链条与滑轮无相对滑动, 滑轮为均质圆盘, 求链条离开滑轮时的速度。

解 链条、滑轮整个系统在运动过程中机械能守恒。以 I—I 线为零势能位置, 轴 x 向

下为正，初始瞬时

$$T_1 = 0$$

$$V_1 = -\rho g l x_c$$

其中链条的质心坐标 y_c 确定如下：

链条弯曲部分的质心坐标

$$x_1 = \frac{-\int_0^\pi \rho R d\theta \cdot R \sin \theta}{\pi R \cdot \rho} = \frac{-2R}{\pi}$$

链条垂直部分的质心坐标

$$x_2 = \frac{l - \pi R}{4}$$

$$x_c = \frac{-\pi R \rho \cdot \frac{2R}{\pi} + (l - \pi R) \rho \cdot \frac{l - \pi R}{4}}{\rho l}$$

$$= \frac{1}{4l} [-8R^2 + (l - \pi R)^2]$$

链条离开滑轮的瞬时：

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho l v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} \rho g l^2$$

代入

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

得

$$0 - \rho g l \cdot \frac{1}{4l} [-8R^2 + (l - \pi R)^2] = \frac{1}{2} \rho l v^2 + \frac{1}{4} m v^2 - \frac{1}{2} \rho g l^2$$

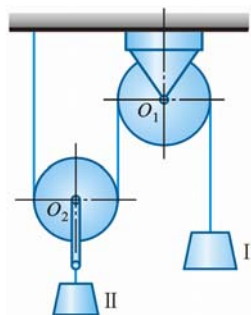
$$v = \sqrt{\frac{4 \left\{ \frac{1}{2} \rho g l^2 - \frac{\rho g}{4} [-8R^2 + (l - \pi R)^2] \right\}}{2 \rho l + m}} = \sqrt{\frac{\{2l^2 - [-8R^2 + (l - \pi R)^2]\} \rho g}{2 \rho l + m}}$$

$$= \sqrt{\frac{\rho g [(l + \pi R)^2 + 2R^2 (4 - \pi^2)]}{2 \rho l + m}}$$

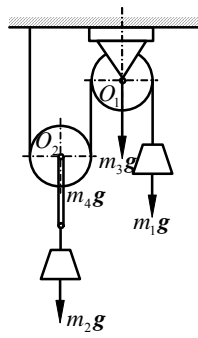
代入数据算得

$$v = 2.51 \text{ m/s}$$

13-9 在图 13-9a 所示滑轮组中悬挂 2 个重物，其中 M_1 的质量为 m_1 ， M_2 的质量为 m_2 。定滑轮 O_1 的半径为 r_1 ，质量为 m_3 ；动滑轮 O_2 的半径为 r_2 ，质量为 m_4 。2 轮都视为均质圆盘。如绳重和摩擦略去不计，并设 $m_2 > 2m_1 - m_4$ 。求重物 m_2 由静止下降距离 h 时的速度。



(a)



(b)

图 13-9

解 整个系统为对象，由题意 $m_2 > 2m_1 - m_4$ 知， M_2 由静止向下运动，可应用动能定

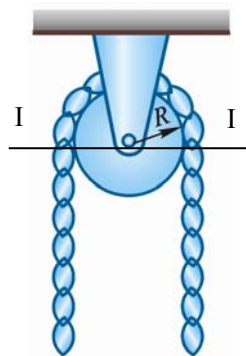


图 13-8

理确定 M_2 的速度。设 M_2 下降 h 距离时的速度为 v ，则动滑轮 O_2 的角速度

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2}$$

定滑轮 O_1 的角速度

$$\omega_1 = \frac{2v}{r_1}$$

根据动能定理

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

$$\text{即} \quad m_2 gh + m_4 gh - 2m_1 gh = \frac{m_2 + m_4}{2} v^2 + \frac{m_4}{4} r_2^2 \omega_2^2 + \frac{m_3}{4} r_1^2 \omega_1^2 + \frac{m_1}{2} (2v)^2$$

$$\text{故} \quad v = \sqrt{\frac{4gh(m_2 - 2m_1 + m_4)}{2m_2 + 8m_1 + 4m_3 + 3m_4}}$$

13-10 2 个质量均为 m_2 的物体用绳连接，此绳跨过滑轮 O ，如图 13-10 所示。在左方物体上放有 1 带孔的薄圆板，而在右方物体上放有 2 个相同的圆板，圆板的质量均为 m_1 。此质点系由静止开始运动，当右方物体和圆板落下距离 x_1 时，重物通过 1 固定圆环板，而其上质量为 $2m_1$ 的薄板则被搁住。摩擦和滑轮质量不计。如该重物继续下降了距离 x_2 时速度为零，求 x_2 与 x_1 的比。

解 第 1 阶段：系统由静止运动 x_1 距离。由动能定理

$$(2m_1 g + m_2 g)x_1 - (m_1 g + m_2 g)x_1 = \frac{1}{2}(3m_1 + 2m_2)v^2$$

$$\text{即} \quad m_1 g x_1 = \frac{1}{2}(3m_1 + 2m_2)v^2 \quad (1)$$

第 2 阶段：系统通过搁板继续运动 x_2 距离后静止。由动能定理

$$m_2 g x_2 - (m_1 g + m_2 g)x_2 = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)v^2$$

$$\text{即} \quad m_1 g x_2 = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)v^2 \quad (2)$$

由式 (1)、式 (2) 得

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1 + 2m_2}{3m_1 + 2m_2}$$

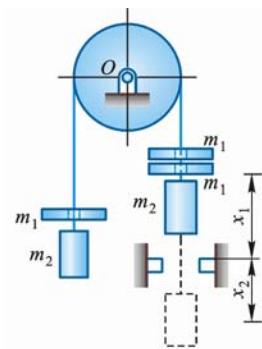


图 13-10

13-11 均质连杆 AB 质量为 4 kg ，长 $l = 600 \text{ mm}$ 。均质圆盘质量为 6 kg ，半径 $r = 100 \text{ mm}$ 。弹簧刚度系数为 $k = 2 \text{ N/mm}$ ，不计套筒 A 及弹簧的质量。如连杆在图 13-11a 所示位置被无初速释放后， A 端沿光滑杆滑下，圆盘做纯滚动。求：(1) 当 AB 达水平位置而接触弹簧时，圆盘与连杆的角速度；(2) 弹簧的最大压缩量 δ 。

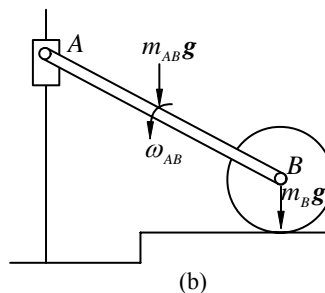
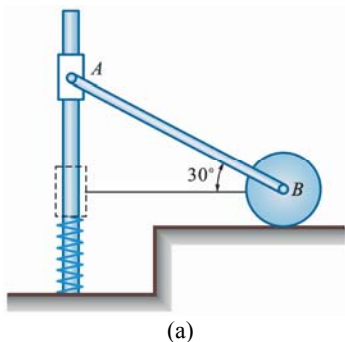


图 13-11

解 (1) 杆 AB 处于水平位置时

$$v_B = 0, \quad \omega_B = 0, \quad B \text{ 为杆 } AB \text{ 的瞬心。}$$

$$W_{12} = m_{AB} \cdot g \cdot \frac{l}{2} \sin 30^\circ$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_{AB} l^2 \cdot \omega_{AB}^2$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_{AB}}{3} l^2 \omega_{AB}^2 = m_{AB} g \cdot \frac{l}{2} \sin 30^\circ$$

$$\omega_{AB} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} = 4.95 \text{ rad/s}$$

(2) 弹簧压缩最大时为 δ ，此时

$$\omega_B = 0, \quad \omega_{AB} = 0$$

弹性力做功

$$W_1 = -\frac{k}{2} \delta^2$$

重力做功

$$W_2 = \left(\frac{\delta}{2} + \frac{l}{4} \right) m_{AB} g$$

$$W = W_1 + W_2 = \left(\frac{\delta}{2} + \frac{l}{4} \right) m_{AB} g - \frac{k}{2} \delta^2 = 0$$

$$\delta^2 - \frac{m_{AB} g}{k} \delta - \frac{l}{2k} m_{AB} g = 0$$

$$\delta = \frac{\frac{m_{AB}}{k} g \pm \sqrt{\left(\frac{m_{AB}}{k} g \right)^2 + 4 \cdot \frac{l}{2k} m_{AB} g}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2000} \times 9.8 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2000} \times 9.8 \right)^2 + \frac{0.6 \times 4}{2 \times 2000} \times 4 \times 98} \right)$$

舍去负根，得

$$\delta = 0.087 \text{ m} = 87 \text{ mm}$$

13-12 如图 13-12a 所示带式运输机的轮 B 受恒力偶 M 的作用，使胶带运输机由静止开始运动。若被提升物体 A 的质量为 m_1 ，轮 B 和轮 C 的半径均为 r ，质量均为 m_2 ，并视为均质圆柱。运输机胶带与水平线成交角 θ ，它的质量忽略不计，胶带与轮之间没有相对滑动。求物体 A 移动距离 s 时的速度和加速度。

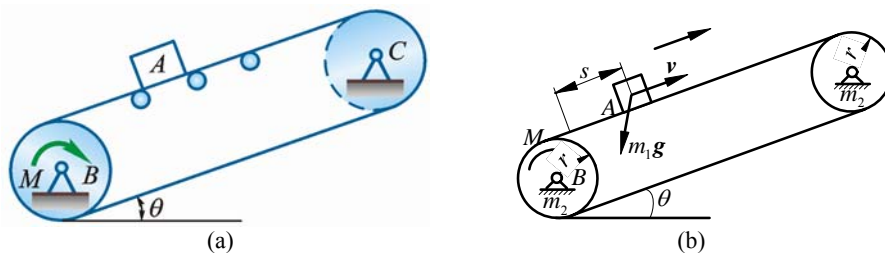


图 13-12

解 设物体 A 由静止移动 s 距离时速度为 v ，由动能定理：

$$W_{12} = M \cdot \frac{s}{r} - m_1 g \sin \theta \cdot s$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}m_2 \cdot r^2 \right) \cdot \left(\frac{v}{r} \right)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 &= \left(\frac{M}{r} - m_1g \sin \theta \right) s \\ v^2 &= \frac{2 \left(\frac{M}{r} - m_1g \sin \theta \right) s}{m_1 + m_2} \\ v &= \sqrt{\frac{2(M - m_1gr \sin \theta)s}{r(m_1 + m_2)}} \end{aligned} \quad (1)$$

式 (1) 对时间 t 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_1 + m_2)2v \cdot a &= \left(\frac{M}{r} - m_1g \sin \theta \right) v \\ a &= \frac{\frac{M}{r} - m_1g \sin \theta}{m_1 + m_2} = \frac{M - m_1gr \sin \theta}{r(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

13-13 周转齿轮传动机构放在水平面内, 如图 13-13a 所示。已知动齿轮半径为 r , 质量为 m_1 , 可看成为均质圆盘; 曲柄 OA , 质量为 m_2 , 可看成为均质杆; 定齿轮半径为 R 。在曲柄上作用一常力偶矩 M , 使此机构由静止开始运动。求曲柄转过 φ 角后的角速度和角加速度。

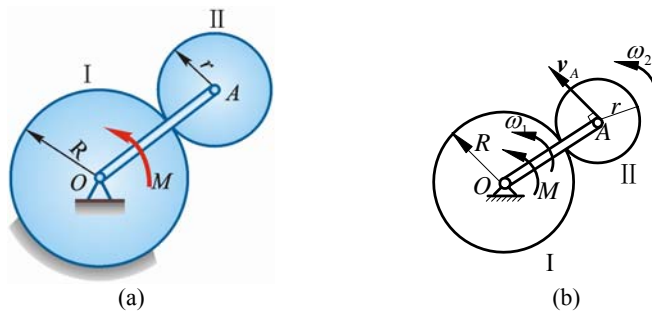


图 13-13

解 整个系统在运动过程中只有力偶矩 M 做功。设曲柄 OA 的转动角速度为 ω_1 , 动齿轮的转动角速度为 ω_2 。动齿轮中心点 A 的速度 (图 13-13b)

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = (R+r)\omega_1 \quad (1)$$

因两齿轮啮合点为动齿轮的速度瞬心, 故

$$v_A = \omega_2 r \quad (2)$$

由式 (1)、式 (2) 得

$$\omega_2 = \frac{R+r}{r}\omega_1$$

曲柄 OA 的质心 C 点的速度

$$v_C = \omega_1 \cdot \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}(R+r)\omega_1$$

由动能定理得

$$\begin{aligned} M\varphi &= \frac{m_1}{2}(R+r)^2\omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{2} r^2 \left(\frac{R+r}{r}\omega_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}m_2(R+r)^2 \right) \omega_1^2 \\ \omega_1 &= \frac{2}{R+r} \sqrt{\frac{3M}{9m_1 + 2m_2}} \varphi \quad (\text{与 } M \text{ 同向}) \end{aligned}$$

两边对时间 t 求导，消去 $\dot{\phi} = \omega_1$ ，得

$$\alpha_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{6M}{(R+r)^2(9m_1+2m_2)} \quad (\text{与 } \omega_1 \text{ 同向})$$

13-14 如图 13-14a、13-14b 所示 2 种支持情况的均质正方形板，边长均为 a ，质量均为 m ，初始时均处于静止状态。受某干扰后均沿顺时针方向倒下，不计摩擦，求当 OA 边处于水平位置时，2 方板的角速度。

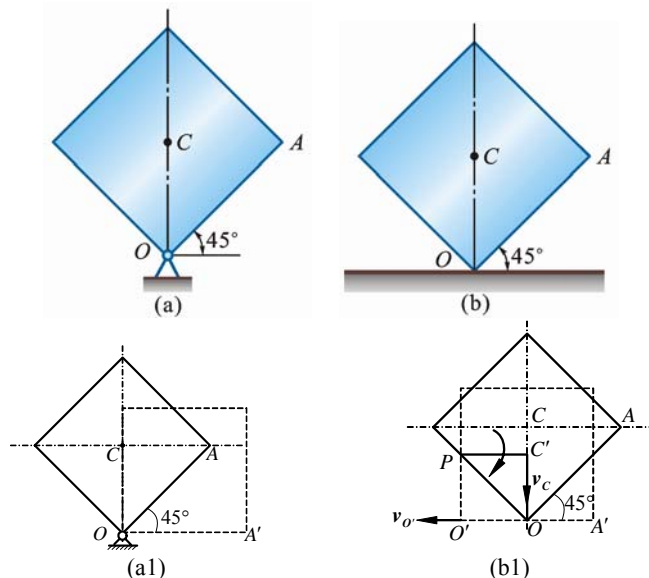


图 13-14

解 (1) 定轴转动倒下，如图 13-14a1 所示，重力做功

$$W = mg \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a \right) = \frac{1}{2}mga(\sqrt{2}-1)$$

动能

$$T = \frac{1}{2}J_O\omega_a^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6}ma^2 + m \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \right] \omega_a^2 = \frac{m}{3}a^2\omega_a^2$$

动能定理

$$T = W$$

$$\frac{m}{3}a^2\omega_a^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}mga$$

$$\omega_a = \frac{2.468}{\sqrt{a}} \text{ rad/s} \quad (a \text{ 以 m 计})$$

(2) 板作平面运动，因水平方向合外力为 0，且初始静止，故水平质心守恒，如图 13-14b1 所示， OA 至水平位置时，瞬心在点 P

$$W = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)mga$$

$$v_C = \frac{a}{2}\omega_b$$

$$T = \frac{1}{2}J_P\omega_b^2 = \frac{1}{2} \left(J_C + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \omega_b^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 \right) \omega_b^2$$

$$T = W$$

$$\frac{5}{24}ma^2\omega_b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}mga$$

$$\omega_b = \frac{3.121}{\sqrt{a}} \text{ rad/s}$$

13-15 水平均质细杆质量为 m ，长为 l ， C 为杆的质心。杆 A 处为光滑铰支座， B 端为 1 挂钩，如图 13-15a 所示。如 B 端突然脱落，杆转到铅垂位置时。问 b 值多大能使杆有最大角速度？

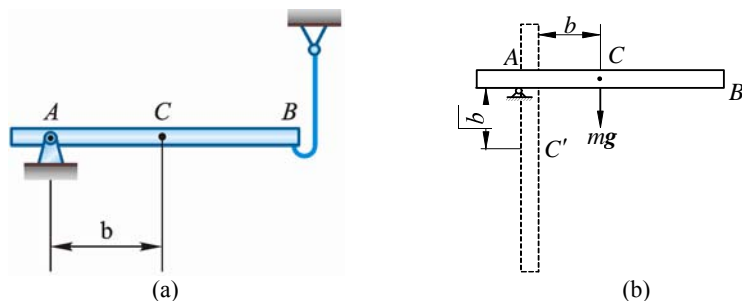


图 13-15

解 由图 13-15b 可得

$$\begin{aligned} mgb &= \frac{1}{2} J_A \omega^2 \\ mgb &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ml^2 + mb^2 \right) \omega^2 \\ 2gb &= \left(\frac{l^2}{12} + b^2 \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

上式两边对 b 求导，得

$$\begin{aligned} 2g &= 2\omega^2 b \\ \omega^2 &= \frac{g}{b} \end{aligned}$$

代入式 (1)，得

$$\begin{aligned} mgb &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} ml^2 + mb^2 \right) \frac{g}{b} \\ b^2 &= \frac{l^2}{12} \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{6} l \end{aligned}$$

13-16 均质细杆长 l ，质量为 m_1 ，上端 B 靠在光滑的墙上，下端 A 以铰链与均质圆柱的中心相连。圆柱质量为 m_2 ，半径为 R ，放在粗糙的地面上，自图 13-16a 所示位置由静止开始滚动而不滑动，初始杆与水平线的交角 $\theta = 45^\circ$ 。求点 A 在初瞬时的加速度。

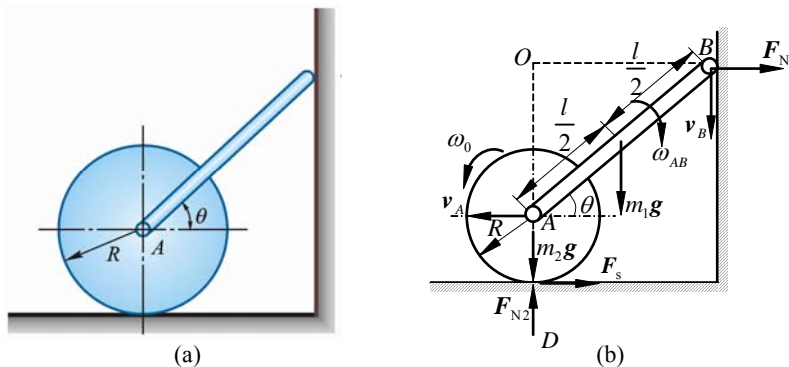


图 13-16

解 系统由静止开始运动至图 13-16b 所示位置时，杆 AB 的速度瞬心为点 O ，其角速度 ω_{AB} 顺时针转向。圆柱的速度瞬心为点 D ，其角速度 ω_D 逆时针转向。

$$v_A = l\omega_{AB} \sin \theta = R\omega_D$$

根据动能定理得

$$m_1 g \frac{l}{2} (\sin 45^\circ - \sin \theta) = \frac{1}{2} J_0 \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} J_D \omega_D^2$$

$$\text{即} \quad m_1 g \frac{l}{2} (\sin 45^\circ - \sin \theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{v_A}{l \sin \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_2 R^2 \right) \left(\frac{v_A}{R} \right)^2$$

整理得

$$v_A^2 = \frac{6m_1 l g (\sin 45^\circ - \sin \theta) \sin^2 \theta}{2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta}$$

两边对时间 t 求导，注意到

$$\dot{\theta} = -\omega_{AB} = -v_A / (l \sin \theta)$$

得

$$\begin{aligned} 2v_A a_A &= \frac{6m_1 l}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \left\{ (2m_1 g + 9m_2 g \sin^2 \theta) \cdot [2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \sin 45^\circ - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \ddot{\theta}] - (\sin 45^\circ - \sin \theta) \sin^2 \theta \cdot 18m_2 g \sin \theta \cos \theta \ddot{\theta} \right\} \\ &= \frac{6m_1 l \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \left\{ 2m_1 g (2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) + 9m_2 g \sin^2 \theta \cdot [(2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) - 2(\sin 45^\circ - \sin \theta)] \right\} \\ 2v_A a_A &= \frac{6m_1 l \sin \theta \cos \theta (-\frac{v_A}{l \sin \theta})}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \cdot \{ 2m_1 g \cdot (2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) - 9m_2 g \sin^3 \theta \} \\ a_A &= -\frac{3m_1 g \cos \theta}{(2m_1 + 9m_2 \sin^2 \theta)^2} \cdot \{ 2m_1 \cdot (2 \sin 45^\circ - 3 \sin \theta) - 9m_2 \sin^3 \theta \} \end{aligned}$$

以 $\theta = 45^\circ$ 代入，解得

$$a_A = \frac{3m_1 g}{4m_1 + 9m_2} \quad (\leftarrow)$$

13-17 在图 13-17 所示车床上车削直径 $D = 48 \text{ mm}$ 的工件，主切削力 $F = 7.84 \text{ kN}$ 。若主轴转速 $n = 240 \text{ r/min}$ ，电动机转速为 1420 r/min 。主传动系统的总效率 $\eta = 0.75$ ，求机床主轴、电动机主轴分别受的力矩和电动机的功率。

解 依题意机床主轴所受力矩

$$\begin{aligned} M_{\text{主}} &= F \cdot \frac{D}{2} = \left(7.84 \times 10^3 \times \frac{48 \times 10^{-3}}{2} \right) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 188 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

机床切削功率

$$\begin{aligned} P_{\text{切}} &= M_{\text{主}} \cdot \omega = \left(188 \times \frac{240 \times 2\pi}{60} \right) \text{ W} = 4725 \text{ W} \\ &= 4.725 \text{ kW} \end{aligned}$$

电动机功率

$$P_{\text{电}} = \frac{P_{\text{切}}}{\eta} = 6.30 \text{ kW}$$

电动机主轴所受力矩

$$M_{\text{电}} = \frac{P_{\text{电}}}{\omega_{\text{电}}} = \left(6.3 \times 10^3 \times \frac{60}{1420 \times 2\pi} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 42.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

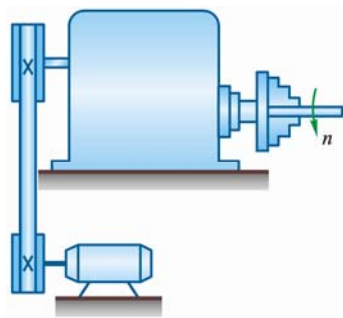


图 13-17

13-18 如图 13-18a 所示，测量机器功率的动力计，由胶带 $ACDB$ 和杠杆 BF 组成。胶带具有铅直的两段 AC 和 BD ，并套住机器的滑轮 E 的下半部，杠杆支点为 O 。借升高或降低支点 O ，可以变更胶带的张力，同时变更轮与胶带间的摩擦力。杠杆上挂 1 质量为 3 kg 的重锤，使杠杆 BF 处于水平的平衡位置。如力臂 $l = 500\text{ mm}$ ，发动机转数 $n = 240\text{ r/min}$ ，求发动机的功率。

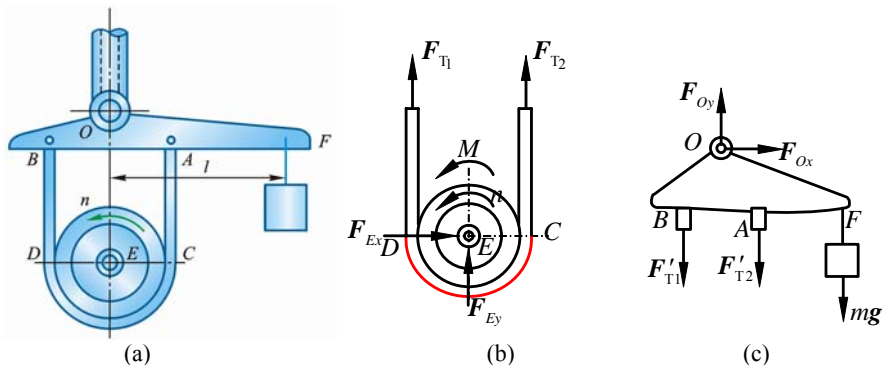


图 13-18

解 设发动机的角速度为 ω ，则

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \left(\frac{2\pi \times 240}{60} \right) \text{ rad/s} = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \text{常数}$$

发动机作等速转动，故滑轮 E 的角加速度

$$\alpha = 0$$

滑轮 E 受力分析如图 13-18b 所示，由

$$\sum M_E = 0$$

得

$$M - (F_{T1} - F_{T2})R = 0$$

$$M = (F_{T1} - F_{T2})R \quad (1)$$

取杠杆为研究对象，受力如图 13-18c 所示，由

$$\sum M_O = 0$$

得

$$mgl - (F'_{T1} - F'_{T2})R = 0$$

$$mgl = (F'_{T1} - F'_{T2})R \quad (2)$$

由式 (1)、式 (2) 得

$$M = mgl$$

发动机的功率

$$P = M\omega = mgl\omega = 3\text{ kg} \times 9.8\text{ m/s}^2 \times 0.50\text{ m} \times 8\pi\text{ rad/s} = 369\text{ W}$$

第 14 章 达朗贝尔原理（动静法）

14-1 如图 14-1a 所示由相互铰接的水平臂连成的传送带，将圆柱形零件从 1 高度传送到另 1 个高度。设零件与臂之间的摩擦因数 $f_s = 0.2$ 。求：（1）降落加速度 a 为多大时，零件不致在水平臂上滑动；（2）比值 h/d 等于多少时，零件在滑动之前先倾倒。

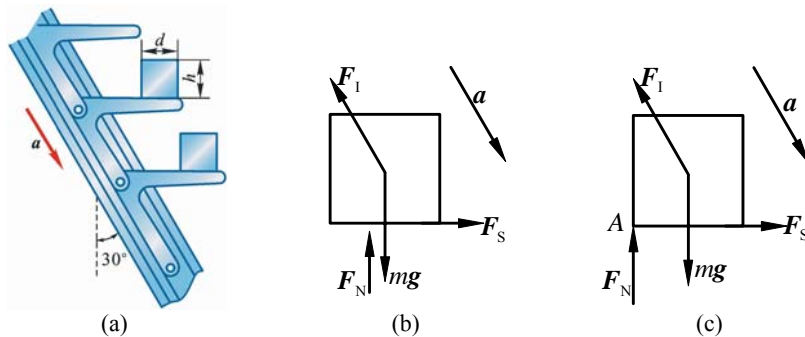


图 14-1

解 取圆柱形零件为研究对象，作受力分析，并虚加上零件的惯性力 F_I 。

（1）零件不滑动时，受力如图 14-1b 所示，它满足以下条件：

摩擦定律

$$F_s \leq f_s F_N \quad (1)$$

达朗贝尔原理

$$\sum F_x = 0, \quad F_s - F_I \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N + F_I \cos 30^\circ - mg = 0 \quad (3)$$

$$F_I = ma \quad (4)$$

式（1）、（2）、（3）、（4）联立，解得

$$a \leq 2.92 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

（2）零件不滑动而倾倒时，约束力 F_N 已集中到左侧点 A，如图 14-1c 所示，零件在惯性力作用下将向左倾倒。倾倒条件是

$$\sum M_A \geq 0, \quad \frac{d}{2}(-mg + F_I \cos 30^\circ) + F_I \sin 30^\circ \frac{h}{2} \geq 0 \quad (6)$$

式（4）、（6）联立，解得

$$\frac{h}{d} \geq \frac{2g - \sqrt{3}a}{a}$$

此时式（1）、（2）、（3）仍满足，将式（5）代入上式得

$$\frac{h}{d} \geq 5$$

14-2 如图 14-2b 所示汽车总质量为 m ，以加速度 a 作水平直线运动。汽车质心 G 离地面的高度为 h ，汽车的前后轴到通过质心垂线的距离分别等于 c 和 b 。求其前后轮的正压力，又，汽车应如何行驶方能使前后轮的压力相等。

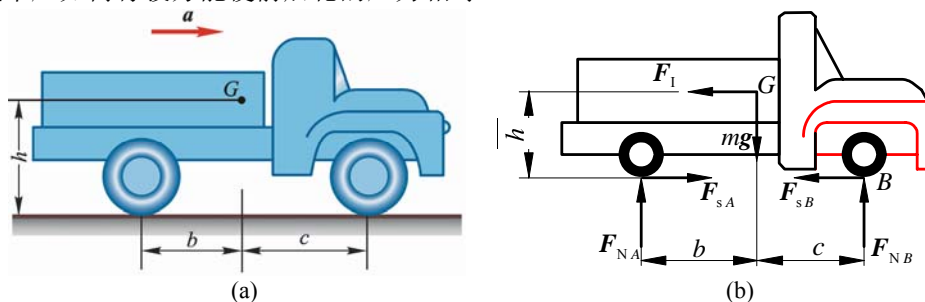


图 14-2

解 取汽车为研究对象，受力（含虚加惯性力）如图 14-2b 所示。其中惯性力

$$F_I = ma$$

由动静法:

$$\sum M_A = 0, \quad F_{NB}(b+c) - mgb + F_1 h = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0, \quad -F_{NA}(b+c) + mgc + F_1 h = 0 \quad (2)$$

解得

$$F_{NA} = m \frac{bg - ha}{(c+b)}, \quad F_{NB} = m \frac{cg + ha}{(b+c)}$$

欲使 $F_{NA} = F_{NB}$, 则汽车的加速度可由

$$m \frac{bg - ha}{(c+b)} = m \frac{cg + ha}{(b+c)}$$

解得

$$a = \frac{(b-c)g}{2h}$$

14-3 如图 14-3a 所示矩形块质量 $m_1 = 100 \text{ kg}$, 置于平台车上。车质量为 $m_2 = 50 \text{ kg}$, 此车沿光滑的水平面运动。车和矩形块在一起由质量为 m_3 的物体牵引, 使之作加速运动。设物块与车之间的摩擦力足够阻止相互滑动, 求能够使车加速运动而 m_1 块不倒的质量为 m_3 的最大值, 以及此时车的加速度大小。

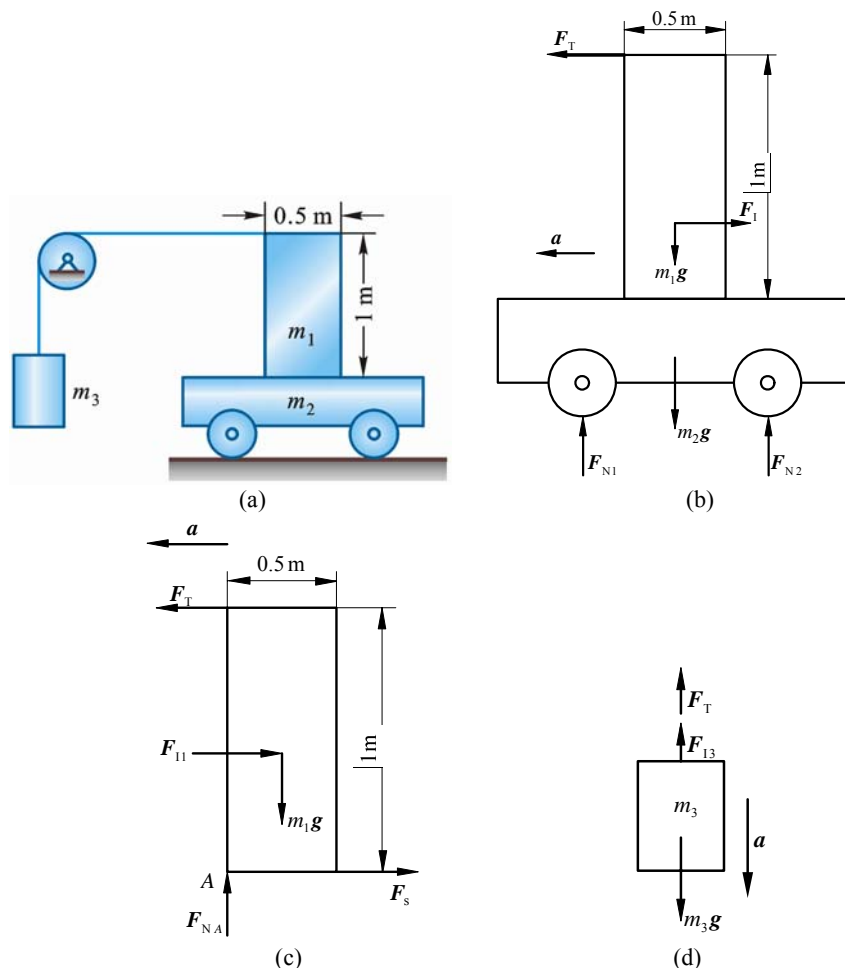


图 14-3

解 取车与矩形块为研究对象如图 14-3b 所示。惯性力为

$$F_I = (m_1 + m_2) a = 150 a$$

由动静法

$$\sum F_x = 0, F_T - F_I = 0, \quad F_T = 150a$$

取矩形块为研究对象, 欲求使车与矩形块一起加速运动而块 m_1 不倒的 m_3 最大值, 应考虑在

此时矩形块受车的约束力 F_N 已集中到左侧点 A ，如图 14-3c 所示，且矩形块惯性力为

$$F_{I1} = m_1 a$$

由动静法，不翻倒的条件为

$$\sum M_A = 0, \quad F_T \cdot 1 - \frac{0.5}{2} \cdot m_1 g - m_1 a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

将

$$F_T = 150 a$$

代入上式，解得

$$a = \frac{g}{4} = 2.45 \text{ m/s}^2$$

取物块为研究对象，惯性力（如图 14-3d 所示）

$$F_{I3} = m_3 a$$

由动静法

$$F_T + m_3 a - m_3 g = 0$$

$$m_3 = \frac{F_T}{g - a} = \frac{150 \cdot \frac{g}{4}}{g - \frac{g}{4}} = 50 \text{ kg}$$

14-4 调速器由两个质量为 m_1 的均质圆盘所构成，圆盘偏心地铰接于距转动轴为 a 的 A 、 B 两点。调速器以等角速度 ω 绕铅直轴转动，圆盘中心到悬挂点的距离为 l ，如图 14-4a 所示。调速器的外壳质量为 m_2 ，并放在两个圆盘上。如不计摩擦，求角速度 ω 与圆盘离铅垂线的偏角 φ 之间的关系。

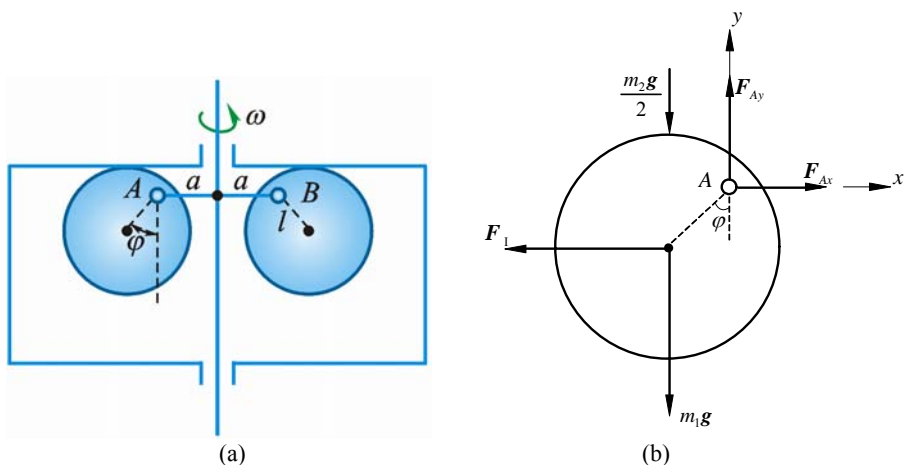


图 14-4

解 取调速器外壳为研究对象，由对称可知壳与圆盘接触处所受约束力为

$$F_N = m_2 g / 2$$

取左圆盘为研究对象，受力如图 14-4b 所示，惯性力为

$$F_I = m_1 \cdot (a + l \sin \varphi) \omega^2$$

由动静法

$$\sum M_A = 0, \quad (m_1 g + \frac{m_2 g}{2}) l \sin \varphi - F_I l \cos \varphi = 0$$

将 F_I 值代入，得

$$\omega^2 = \frac{2m_1 + m_2}{2m_1(a + l \sin \varphi)} g \tan \varphi$$

14-5 曲柄滑道机械如图 14-5a 所示，已知圆轮半径为 r ，对转轴的转动惯量为 J ，轮上作用 1 不变的力偶 M ， ABD 滑槽的质量为 m ，不计摩擦。求圆轮的转动微分方程。

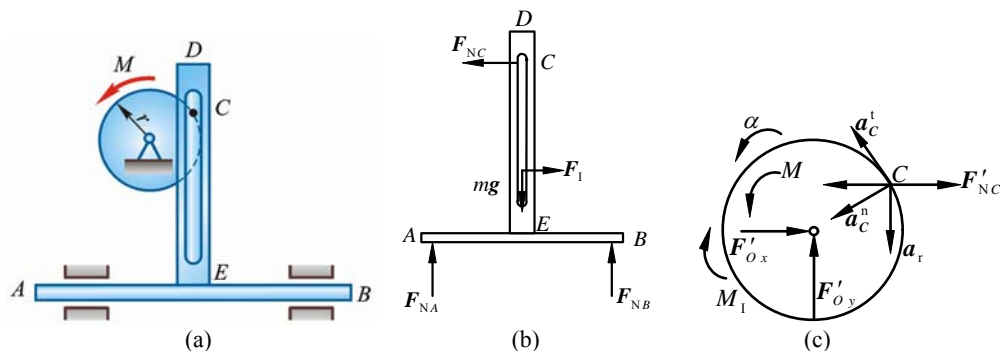


图 14-5

解 取 C 为动点，动系固结于 ABD 滑槽，点 C 的绝对加速度分解为 \mathbf{a}_a^t , \mathbf{a}_a^n ，滑槽的加速度为 \mathbf{a}_e ，则

$$a_e = a_a^t \sin \varphi + a_a^n \cos \varphi = r\ddot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

其中 φ 为任意角。

取 ABD 滑槽为研究对象，受力分析如图 14-5b 所示。图中惯性力为

$$F_I = mr\ddot{\varphi} \sin \varphi + mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

由动静法：

$$\sum F_x = 0, \quad F_I - F_{NC} = 0$$

解得

$$F_{NC} = m(r\ddot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

取圆轮为研究对象，受力分析如图 c，惯性力偶矩

$$M_I = J\ddot{\varphi}$$

由动静法：

$$\sum M_O = 0, \quad M - M_I - F'_{NC} r \sin \varphi = 0$$

$$(J + mr^2 \sin^2 \varphi)\ddot{\varphi} + mr^2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi = M$$

14-6 如图 14-6a 所示，长方形匀质平板，质量为 27 kg，由两个销 A 和 B 悬挂。如果突然撤去销 B ，求在撤去销 B 的瞬时平板的角加速度和销 A 的约束力。

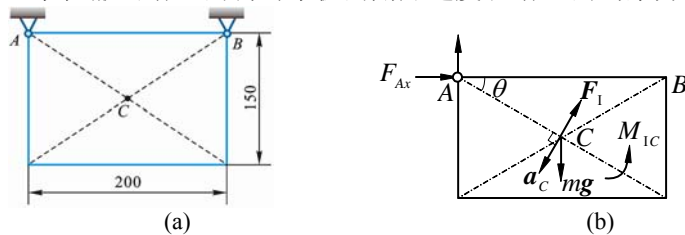


图 14-6

解 取平板为研究对象，突然撤去销 B 的瞬时平板的角速度 $\omega = 0$ ，角加速度 $\alpha \neq 0$ 。平板长 $a = 0.2$ m，平板宽 $b = 0.15$ m。平板对质心 C 的转动惯量为

$$J_C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

平板对 A 的转动惯量为

$$J_A = J_C + m \cdot AC^2 = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

把惯性力系向销 A 简化（见图 14-6b）得

$$F_I = ma_C^t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} m \alpha$$

$$M_I = J_A \alpha = \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \alpha$$

由动静法:

$$\sum M_A = 0, M_I - mg \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_I \cdot \frac{15}{25} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_I \cdot \frac{20}{25} - mg = 0 \quad (3)$$

把有关量代入上述方程组, 由式 (1) 得 $\alpha = 47 \text{ rad/s}^2$ (顺)

由式 (2) 得 $F_{Ax} = -95 \text{ N}$ (与原设反向)

由式 (3) 得 $F_{Ay} = 138 \text{ N}$

讨论: 如把惯性力系向质心 C 简化, 则平板的惯性力

$$F_I = ma_C^t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} m \alpha$$

平板对其质心的惯性力偶矩为

$$M_{IC} = J_C \alpha = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \alpha$$

由动静法 $\sum M_A = 0, M_{IC} + F_I \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - mg \cdot \frac{a}{2} = 0$

将有关各量代入, 得

$$\alpha = 47 \text{ rad/s}^2$$

可见这 2 种方法均可使用。

14-7 图 14-7a 所示为均质细杆弯成的圆环, 半径为 r , 转轴 O 通过圆心垂直于环面, A 端自由, AD 段为微小缺口, 设圆环以匀角速度 ω 绕轴 O 转动, 环的线密度为 ρ , 不计重力, 求任意截面 B 处对 AB 段的约束力。

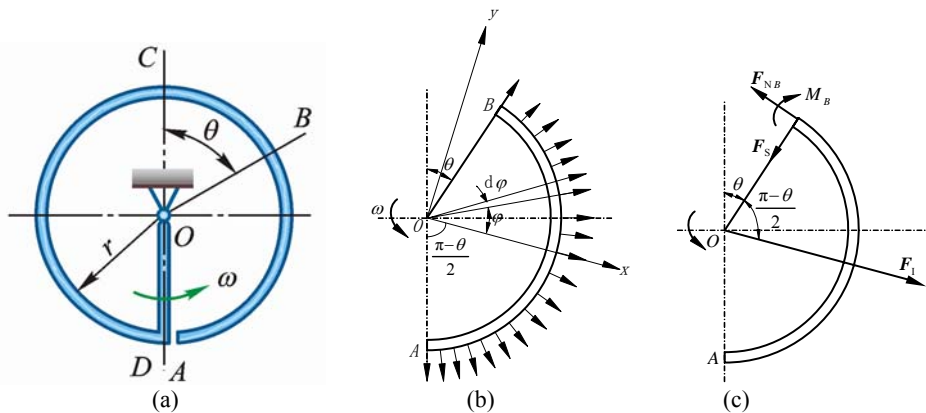


图 14-7

解 (1) 取图 14-7b 所示坐标, 分布惯性力向外, 由对称性, 其合力在轴 y 上投影为 0, 即

$$F_{Iy} = 0$$

$$F_{Ix} = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} r \omega^2 \cdot \rho r \cos \varphi d\varphi = \rho r^2 \omega^2 \cdot 2 \sin \frac{\pi-\theta}{2} = 2 \rho r^2 \omega^2 \cos \frac{\theta}{2}$$

(2) 见图 14-7c

$$\sum M_B = 0, \quad M_B = F_{lx} \cdot r \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = 2\rho r^3 \omega^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \rho \omega^2 r^3 (1 + \cos \theta)$$

$$\sum F_t = 0, \quad F_{TB} = F_{lx} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = F_{lx} \sin \frac{\theta}{2} = \rho r^2 \omega^2 \sin \theta$$

$$\sum F_n = 0, \quad F_{NB} = F_{lx} \cos \frac{\theta}{2} = \rho \omega^2 r^2 (1 + \cos \theta)$$

14-8 如图 14-8a 所示均质曲杆 $ABCD$ 刚性地连接于铅直转轴上，已知 $CO = OB = b$ ，转轴以匀角速度 ω 转动。欲使 AB 及 CD 段截面只受沿杆的轴向力，求 AB ， CD 段的曲线方程。

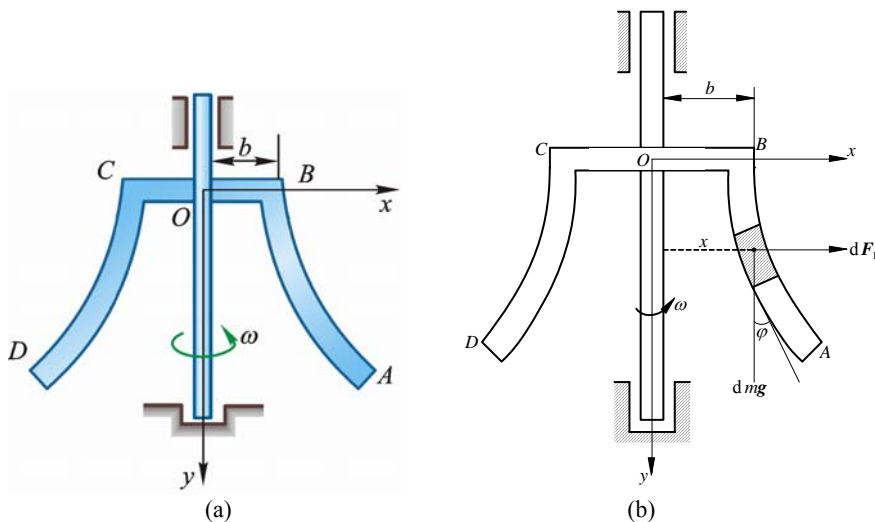


图 14-8

解 在曲杆 AB 段上任取 1 微单元为研究对象，设质量为 dm ，其上有惯性力，

$$dF_I = dm \cdot x \omega^2, \quad \text{重力 } dm g, \quad \text{如图 b.}$$

设重力与切线之夹角为 φ ，按题意 dF_I 与 $dm g$ 的合力沿该切线方向，故应有

$$\tan \varphi = \frac{dF_I}{dm g} = \frac{dm \cdot x \omega^2}{dm g} = \frac{x \omega^2}{g}$$

$$\tan \varphi = \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x \omega^2}{g}$$

积分

$$\int_0^y dy = \frac{g}{\omega^2} \int_b^x \frac{dx}{x}$$

$$y = \frac{g}{\omega^2} \ln \frac{x}{b}, \quad \text{或} \quad \frac{x}{b} = e^{\frac{\omega^2 y}{g}}$$

AB 或 CD 段之曲线方程为

$$x = b e^{\frac{\omega^2 y}{g}}$$

14-9 转速表的简化模型如图 14-9 所示。杆 CD 的两端各有质量为 m 的球 C 和球 D ，杆 CD 与转轴 AB 铰接，质量不计。当转轴 AB 转动时，杆 CD 的转角 φ 就发生变化。设 $\omega = 0$ 时， $\varphi = \varphi_0$ ，且弹簧中无力。弹簧产生的力矩 M 与转角 φ 的关系为 $M = k(\varphi - \varphi_0)$ ， k 为弹簧刚度。求角速度 ω 与角 φ 之间的关系。

解 取 2 球及杆 CD 为研究对象如图 14-9b 所示，由动静法

$$\sum M_x = 0, \quad M - 2F_I \cdot l \cos \varphi = 0$$

其中

$$F_I = m \cdot l \sin \varphi \cdot \omega^2$$

代入前式得

$$k(\varphi - \varphi_0) - 2 \cdot m \cdot l \sin \varphi \cdot \omega^2 \cdot l \cos \varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k(\varphi - \varphi_0)}{ml^2 \sin 2\varphi}}$$

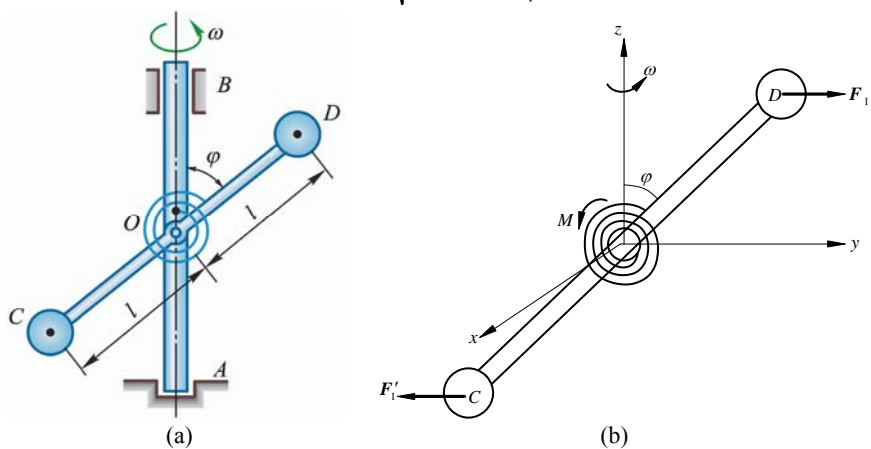


图 14-9

14-10 轮轴质心位于 O 处，对轴 O 的转动惯量为 J_O 。在轮轴上系有两个物体，质量各为 m_1 和 m_2 。若此轮轴依顺时针转向转动，求轮轴的角加速度 α 和轴承 O 的动约束力。

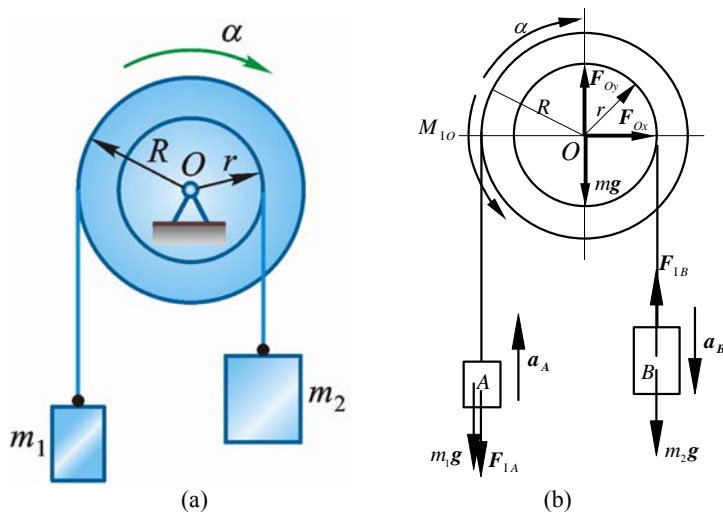


图 14-10

解 整个系统为研究对象。设 m 为轮轴质量，图 14-10b 中 F_{Ox} ， F_{Oy} 只表示 O 处动约束力。

$$F_{1A} = m_1 a_A = m_1 R \alpha$$

$$F_{1B} = m_2 a_B = m_2 r \alpha$$

$$M_{1O} = J \alpha$$

由动静法：

$$\sum M_O = 0$$

$$m_1 g R + F_{1A} \cdot R + M_{1O} + F_{1B} \cdot r - m_2 g r = 0$$

即

$$m_1 g R + m_1 g R^2 \alpha + J \alpha + m_2 r^2 \alpha - m_2 g r = 0$$

$$(J + m_1 R^2 + m_2 r^2) \alpha = (m_2 r - m_1 R) g$$

$$\alpha = \frac{(m_2 r - m_1 R)}{(J + m_1 R^2 + m_2 r^2)} g$$

轴 O 动约束力与惯性力相平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} + F_{IB} - F_{IA} = 0$$

$$F_{Oy} = m_1 R \alpha - m_2 r \alpha = (m_1 R - m_2 r) \alpha = \frac{-(m_2 r - m_1 R)^2}{J + m_1 R^2 + m_2 r^2} g$$

14-11 如图 14-11a 所示, 质量为 m_1 的物体 A 下落时, 带动质量为 m_2 的均质圆盘 B 转动, 不计支架和绳子的重量及轴上的摩擦, $BC = a$, 盘 B 的半径为 R 。求固定端 C 的约束力。

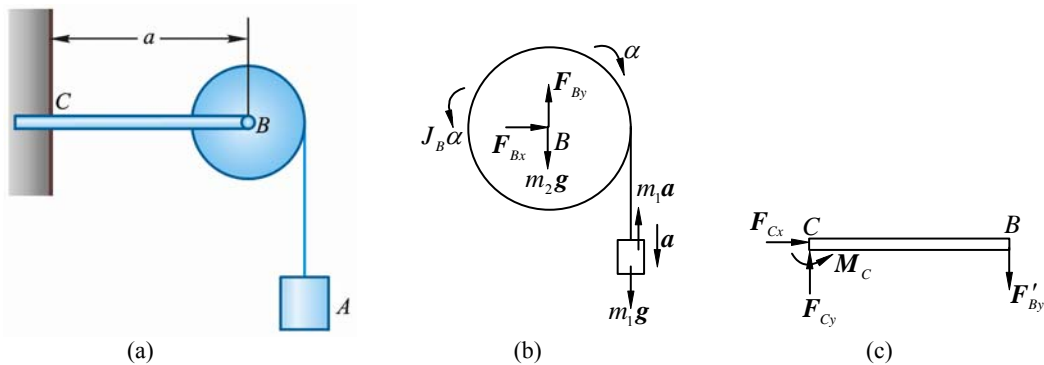


图 14-11

解 (1) 见图 14-11b

$$\sum M_B = 0, \quad J_B \alpha + m_1 a \cdot R - m_1 g R = 0, \quad \frac{1}{2} m_2 R^2 \cdot \frac{a}{R} + m_1 R a - m_1 R g = 0$$

$$a = \frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} g$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{By} - m_2 g + m_1 a - m_1 g = 0, \quad F_{By} = \frac{3m_1 m_2 + m_2^2}{2m_1 + m_2} g$$

(2) 见图 14-11c

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Cy} = \frac{3m_1 m_2 + m_2^2}{2m_1 + m_2} g$$

$$\sum M_C = 0, \quad M_C = \frac{(3m_1 + m_2)m_2}{2m_1 + m_2} ag$$

14-12 如图 14-12a 所示, 电动绞车提升 1 质量为 m 的物体, 在主动轴上作用有 1 矩为 M 的主动力偶。已知主动轴和从动轴连同安装在这两轴上的齿轮以及其他附属零件的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 ; 传动比 $z_2 : z_1 = i$; 吊缠绕在鼓轮上, 此轮半径为 R 。设轴承的摩擦和吊索的质量均略去不计, 求重物的加速度。

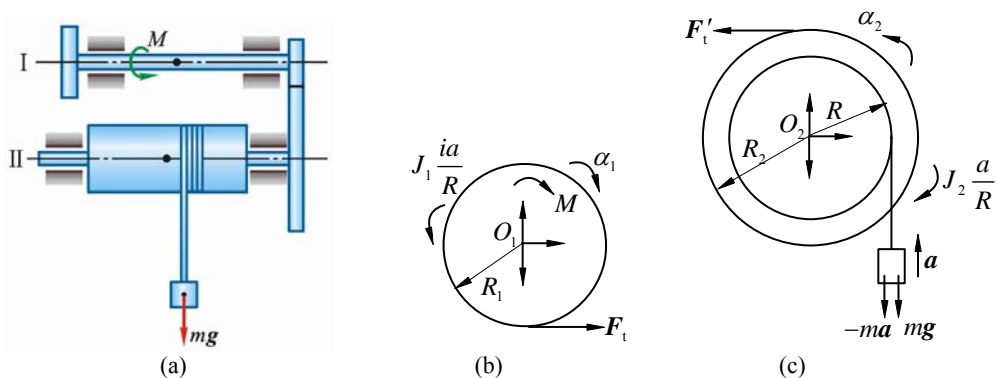


图 14-12

解 (1) 如图 14-12b 所示 (O_1 处受力未标注, 因计算中用不到, 下同)

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F_1 R_1 + J_1 \frac{ia}{R} - M = 0 \quad (1)$$

(2) 如图 14-12c 所示

$$\sum M_{O_2} = 0, \quad F_1 R_2 - J_2 \frac{a}{R} - m(a + g) = 0 \quad (2)$$

$$R_2 = iR_1 \quad (3)$$

式 (1)、(2)、(3) 联立, 解得
$$a = \frac{(iM - mgR)R}{mR^2 + i^2 J_1 + J_2} \quad (\uparrow)$$

14-13 如图 14-13a 所示, 为升降重物用的叉车, B 为可动圆滚 (滚动支座), 叉头 DBC 用铰链 C 与铅直导杆连接。由于液压机构的作用, 可使导杆在铅直方向上升或下降, 因而可升降重物。已知叉车连同铅直导杆的质量为 1500 kg , 质心在 G_1 ; 叉头与重物的共同质量为 800 kg , 质心在 G_2 。如果叉头向上加速度使得后轮 A 的约束力等于零, 求这时滚轮 B 的约束力。

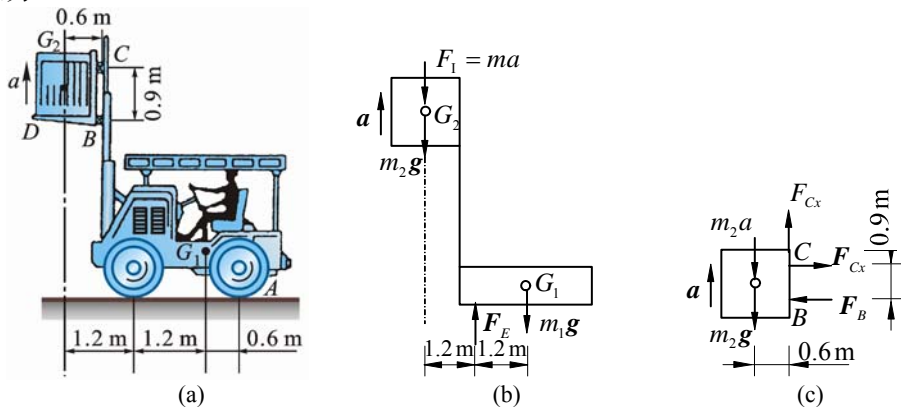


图 14-13

解 (1) 整体平衡, 受力如图 14-13b 所示

$$\sum M_E = 0, \quad m_2(a + g) = m_1 g, \quad 800(a + g) = 1500g, \quad a = \frac{7}{8}g$$

(2) 受力如图 14-13c 所示, 平衡

$$\sum M_C = 0, \quad 0.9F_B = m_2(a + g) \times 0.6$$

$$F_B = \frac{2}{3}m_2(a + g) = \frac{2}{3} \times 800 \times \left(\frac{7}{8} + 1\right) \times 9.8 = 9.8 \times 10^3 \text{ N} = 9.8 \text{ kN}$$

14-14 当发射卫星实现星箭分离时, 打开卫星整流罩的 1 种方案如图 14-14a 所示。先由释放机构将整流罩缓慢送到图示位置, 然后令火箭加速, 加速度为 a , 从而使整流罩向外转。当其质心 C 转到位置 C' 的时候, O 处铰链自动脱开, 使整流罩离开火箭。设整流罩质量为 m , 对轴 O 的回转半径为 ρ , 质心到轴 O 的距离 $OC = r$ 。问整流罩脱落时, 角速度为多大?

解 忽略重力影响, 惯性力 F_{IC} 做功

$$W = F_{IC}r = mar$$

动能

$$T_2 = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2, \quad T_1 = 0$$

动能定理

$$T_2 = W, \quad \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 = mar$$

$$\omega = \frac{1}{\rho} \sqrt{2ar}$$

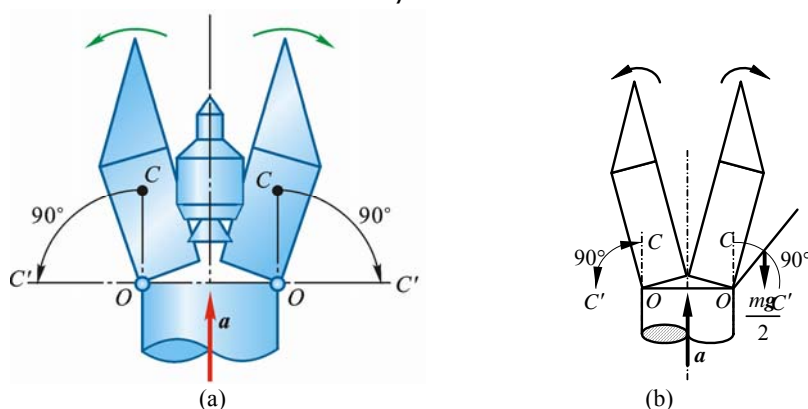


图 14-14

14-15 如图 14-15a 所示，曲柄 OA 质量为 m_1 ，长为 r ，以等角速度 ω 绕水平的 O 轴反时针方向转动。曲柄 OA 推动质量为 m_2 的滑杆 BC ，使其沿铅垂方向运动。忽略摩擦，求当曲柄与水平方向夹角 30° 时的力偶矩 M 及轴承 O 的约束力。

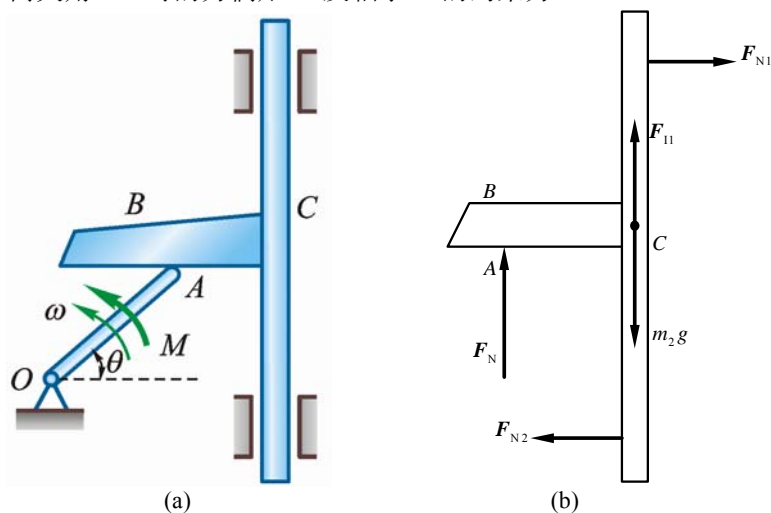


图 14-15

解 取曲柄 OA 上点 A 为动点，动系固结于滑杆 BC ，则

$$a_e = a_a \sin 30^\circ = \frac{1}{2} r \omega^2$$

(1) 取滑杆 BC 为研究对象，受力如图 14-15b 所示，由动静法

$$\sum F_y = 0, F_N + F_{11} - m_2 g = 0$$

式中

$$F_{11} = m_2 a_e = m_2 r \omega^2 / 2$$

解得

$$F_N = m_2 g - \frac{m_2}{2} r \omega^2$$

(2) 取曲柄 OA 为研究对象，由动静法

$$\sum M_O = 0, \quad M - F_N \cdot r \frac{\sqrt{3}}{2} - m_1 g \frac{r}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$M = \frac{\sqrt{3}}{4} [r(m_1 g + 2m_2 g) - m_2 r^2 \omega^2]$$

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{Ox} + F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad F_1 = m_1 \cdot \frac{r \omega^2}{2}$$

$$F_{Ox} = \frac{\sqrt{3}}{4} m_1 r \omega^2$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - F_N + F_1 \cdot \frac{1}{2} - m_1 g = 0$$

$$F_{Oy} = m_1 g + m_2 g - \frac{m_1 + 2m_2}{4} r \omega^2$$

14-16 曲柄摇杆机构的曲柄 OA 长为 r , 质量 m , 在力偶 M (随时间而变化) 驱动下以匀角速度 ω_0 转动, 并通过滑块 A 带动摇杆 BD 运动。 OB 铅垂, BD 可视为质量为 $8m$ 的均质等直杆, 长为 $3r$ 。不计滑块 A 的质量和各处摩擦; 如图 14-16a 所示瞬时, OA 水平、 $\theta = 30^\circ$ 。求此时驱动力偶矩 M 和 O 处约束力。

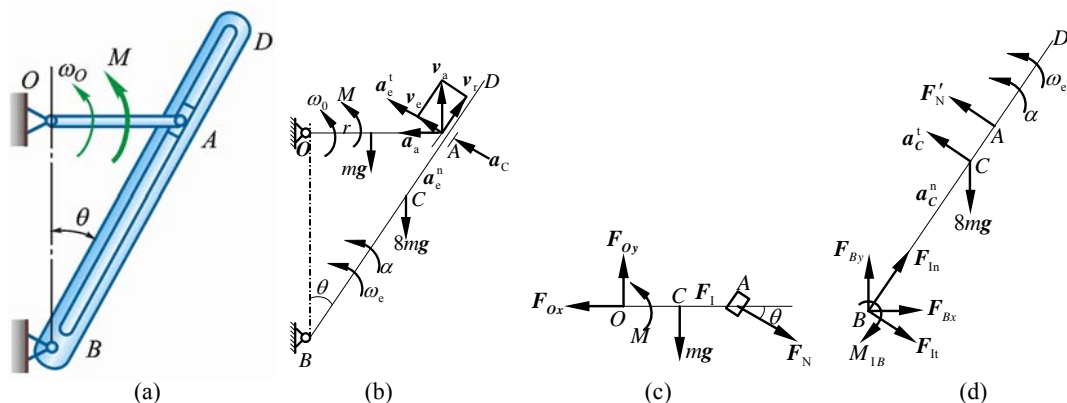


图 14-16

解 (1) 如图 14-16b 所示, OA 上 A 为动点, 动系固结于 BD 。

$$v_a = r\omega_0$$

$$v_e = \frac{1}{2} v_a = \frac{1}{2} r\omega_0$$

$$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2} v_a = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0$$

$$\omega_e = \frac{v_e}{2r} = \frac{\omega_0}{4}$$

$$a_c = 2\omega_e v_r = 2 \cdot \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$$

$$a_a = r\omega_0^2$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

$$a_a \cos \theta = a_e^t + a_c$$

$$a_e^t = r\omega_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$$

$$\alpha = \frac{a_e^t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2$$

(2) 如图 14-16d 所示, 杆 BD

$$\sum M_B = 0, \quad -M_{1B} - 8mg \cdot \frac{3r}{2} \cdot \frac{1}{2} + F_N' \cdot 2r = 0$$

$$M_{IB} = J_B \alpha = \frac{1}{3} 8m \cdot (3r)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2 = 3\sqrt{3} r^2 \omega_0^2 m$$

$$F'_N = 3mg + \frac{3}{2} \sqrt{3} mr \omega_0^2$$

(3) 如图 14-16c 所示

$$\sum M_O = 0, \quad M - mg \cdot \frac{r}{2} - F_N \sin \theta \cdot r = 0$$

$$M = \frac{1}{2} mgr + r \sin \theta \cdot (3mg + \frac{3}{2} \sqrt{3} mr \omega_0^2) = 2mgr + \frac{3\sqrt{3}}{4} mr^2 \omega_0^2$$

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{Ox} + F_I + F_N \cos \theta = 0,$$

$$F_{Ox} = F_N \cos \theta + F_I = (3mg + \frac{3\sqrt{3}}{2} mr \omega_0^2) \frac{\sqrt{3}}{2} + m \frac{r}{2} \omega_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg + \frac{11}{4} mr \omega_0^2$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - mg - F_N \sin \theta = 0$$

$$F_{Oy} = mg + F_N \sin \theta = mg + (3mg + \frac{3\sqrt{3}}{2} mr \omega_0^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} mg + \frac{3\sqrt{3}}{4} mr \omega_0^2$$

14-17 如图 14-17a 所示，均质板质量为 m ，放在 2 个均质圆柱滚子上，滚子质量皆为 $\frac{m}{2}$ ，其半径均为 r 。如在板上作用 1 水平力 F ，并设滚子无滑动，求板的加速度。

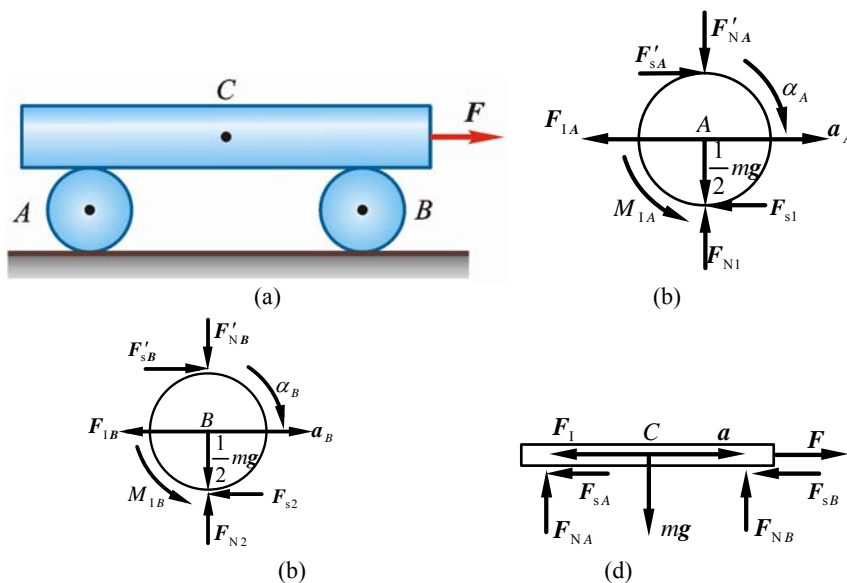


图 14-17

解 设板的加速度为 a ，则滚子中心的加速度为 $\frac{a}{2}$ 。

(1) 取圆柱 A 为研究对象，见图 14-17b，其惯性力和惯性力矩为

$$F_{IA} = \frac{m}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{m}{4} a, \quad M_{IA} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} r^2 \right) \cdot \left(\frac{a}{2r} \right) = \frac{m}{8} ra \quad (1)$$

由动静法

$$\sum M_D = 0, \quad F_{IA} \cdot r + M_{IA} - F'_A \cdot 2r = 0 \quad (2)$$

式 (1) 代入式 (2)，解得

$$F'_A = \frac{3m}{16} a \quad (3)$$

(2) 取圆柱 B 为研究对象，见图 14-17c，同理可得

$$F'_B = \frac{3m}{16}a \quad (4)$$

(3) 取板为研究对象, 见图 14-17d, 惯性力为

$$F_I = ma \quad (5)$$

由动静法

$$F - F_I - F_A - F_B = 0$$

式 (3)、(4)、(5) 代入上式, 得

$$a = \frac{8F}{11m}$$

14-18 铅垂面内曲柄连杆滑块机构中, 均质直杆 $OA = r$ 、 $AB = 2r$, 质量分别为 m 和 $2m$, 滑块质量为 m 。曲柄 OA 匀速转动, 角速度为 ω_0 。在图 14-18a 所示瞬时, 滑块运行阻力为 F 。不计摩擦, 求滑道对滑块的约束力及 OA 上的驱动力偶矩 M_0 。

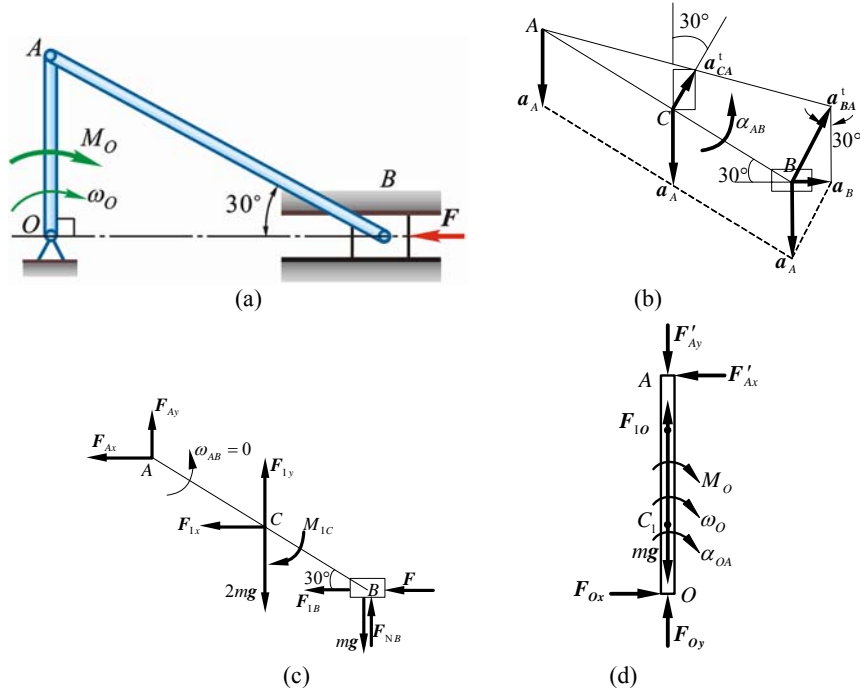


图 14-18

解 研究对象: $OA + AB +$ 滑块 B 组成的系统。

(1) AB 加速度分析如图 14-18b 所示

$$a_A = r\omega_0^2, \quad \omega_{AB} = 0 \quad (\text{瞬时平移})$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n \\ \text{方向} &\rightarrow \quad \downarrow \quad \perp AB \quad BA \\ \text{大小} &\quad ? \quad R\omega_0^2 \quad ? \quad 0 \end{aligned}$$

$$a_{BA}^t = \frac{a_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}r\omega_0^2, \quad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{2r} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}$$

$$a_B = \frac{1}{2}a_{BA}^t = \frac{1}{\sqrt{3}}r\omega_0^2, \quad a_{CA}^t = \frac{1}{2}a_{BA}^t = \frac{1}{\sqrt{3}}r\omega_0^2$$

$$\vec{a}_{Cx} + \vec{a}_{Cy} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^t$$

$$a_{Cx} = \frac{1}{2} \cdot a_{CA}^t = \frac{r\omega_0^2}{2\sqrt{3}} \quad (\rightarrow), \quad a_{Cy} = a_{CA}^t \cos 30^\circ - a_A = -\frac{r\omega_0^2}{2} \quad (\downarrow)$$

(2) AB 受力 (含惯性力、惯性力矩) 如图 14-18c 所示, 图中

$$F_{lx} = 2ma_{Cx} = m \frac{r\omega_0^2}{\sqrt{3}} \quad (\leftarrow)$$

$$F_{ly} = 2m \cdot \frac{r\omega_0^2}{2} = mr\omega_0^2 \quad (\uparrow)$$

$$M_{IC} = J_C \alpha_{AB} = \frac{1}{12} 2m(2r)^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}} = \frac{2mr^2}{3\sqrt{3}} \omega_0^2$$

$$F_{lB} = ma_B = \frac{m}{\sqrt{3}} r\omega_0^2$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\begin{aligned} & -M_{IC} - F_{lx} \cdot \frac{r}{2} - 2mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r + F_{ly} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r - F \cdot r - F_{lB} \cdot r - mg \cdot 2r \cos 30^\circ \\ & + F_{NB} \cdot 2r \cos 30^\circ = 0 \\ & -\frac{2mr^2\omega_0^2}{3\sqrt{3}} - \frac{mr^2}{2\sqrt{3}}\omega_0^2 - \sqrt{3}mgr + \frac{\sqrt{3}}{2}mr^2\omega_0^2 - Fr - \frac{m}{\sqrt{3}}r^2\omega_0^2 - \sqrt{3}mgr + \sqrt{3}rF_{NB} = 0 \\ & -\frac{4\sqrt{3}}{18}mr^2\omega_0^2 - 2\sqrt{3}mgr - Fr + \sqrt{3}rF_{NB} = 0 \end{aligned}$$

$$F_{NB} = 2mg + \frac{\sqrt{3}}{3}F + \frac{2}{9}mr\omega_0^2$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{lx} - F_{lB} - F = 0$$

$$F_{Ax} = \frac{m}{\sqrt{3}}r\omega_0^2 + \frac{m}{\sqrt{3}}r\omega_0^2 + F = \frac{2}{\sqrt{3}}mr\omega_0^2 + F$$

(3) 杆 OA 受力如图 14-18d 所示, 图中
 $\alpha_{OA} = 0$

$$\sum M_O = 0, \quad F'_{Ax} \cdot r - M_0 = 0, \quad M_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}mr\omega_0^2 + F\right)r$$

14-19 如图 14-19a 所示, 磨刀砂轮 I 质量 $m_1 = 1 \text{ kg}$, 其偏心距 $e_1 = 0.5 \text{ mm}$, 小砂轮 II 质量 $m_2 = 0.5 \text{ kg}$, 偏心距 $e_2 = 1 \text{ mm}$ 。电动机转子 III 质量 $m_3 = 8 \text{ kg}$, 无偏心, 带动砂轮旋转, 转速 $n = 3000 \text{ r/min}$ 。求转动时轴承 A、B 的附加动约束力。

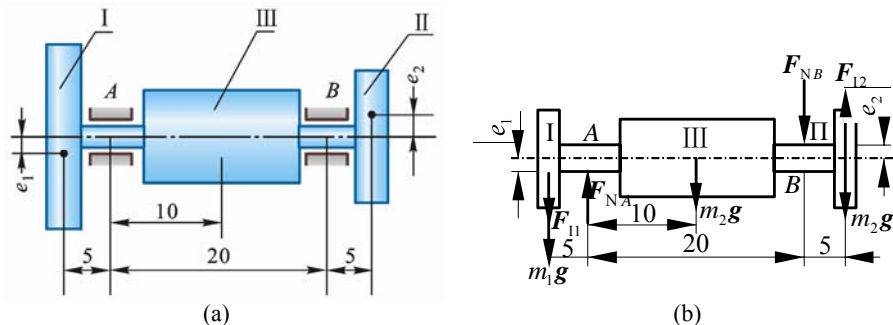


图 14-19

解 取整个系统为研究对象, 受力如图 14-19b 所示。

因为转速 $n =$ 常量, 所以角加速度 $\alpha = 0$, 惯性力偶矩 $M_I = 0$

$$F_{II} = m_1 e_1 \omega^2 = \left[1 \times 0.5 \times 10^{-3} \left(\frac{3000\pi}{30} \right)^2 \right] \text{ N} = 5\pi^2 \text{ N}$$

$$F_{I2} = m_2 e_2 \omega^2 = \left[0.5 \times 1 \times 10^{-3} \left(\frac{3000\pi}{30} \right)^2 \right] \text{ N} = 5\pi^2 \text{ N}$$

因 F_{11} 与 F_{12} 大小相等、方向相反，故组成 1 力偶， F_{NA} ， F_{NB} 也必成 1 力偶，方向如图 14-19b 所示。

由动静法

$$\sum M = 0$$

得

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{0.3}{0.2} F_{11} = 15 \times 5\pi^2 = 74\text{N}$$

14-20 3 圆盘 A、B 和 C 质量各为 12 kg，共同固结在轴 x 上，其位置如图 14-20a 所示。若盘 A 质心 G 距轴 5 mm，而盘 B 和 C 的质心在轴上。今若将两个皆为 1 kg 的均衡质量分别放在盘 B 和 C 上，问应如何放置可使物系达到动平衡？

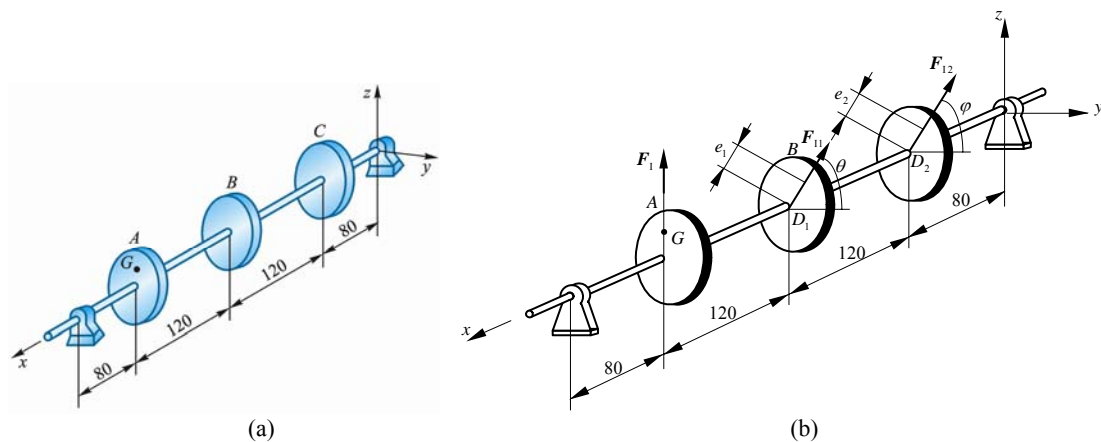


图 14-20

解 取整个系统为研究对象，设 D_1 、 D_2 各为两平衡质量的质心，偏心距分别为 e_1 及 e_2 mm，偏心方向与 y 方向的夹角分别为 θ 、 φ ，转轴角速度为 ω ，则惯性力大小分别为

$$F_1 = 12 \times \frac{5}{1000} \omega^2 = \frac{6\omega^2}{100} \text{ N}$$

$$F_{11} = 1 \cdot \frac{e_1}{1000} \omega^2 = \frac{e_1 \omega^2}{1000} \text{ N}$$

$$F_{12} = 1 \cdot \frac{e_2}{1000} \omega^2 = \frac{e_2 \omega^2}{1000} \text{ N}$$

F_1 平行于 z 轴， F_{11} 与 y 轴夹角为 θ ， F_{12} 与 y 轴夹角为 φ 。

根据动静法，系统达到动平衡时，惯性力系应为平衡力系，于是有

$$\sum F_y = 0, \quad F_{11} \cos \theta + F_{12} \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_1 + F_{11} \sin \theta + F_{12} \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_y = 0, \quad 320F_1 + F_{11} \sin \theta \cdot 200 + F_{12} \sin \varphi \cdot 80 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_z = 0, \quad F_{11} \cos \theta \cdot 200 + F_{12} \cos \varphi \cdot 80 = 0 \quad (4)$$

把 F_1 、 F_{11} 、 F_{12} 代入上述式子，解得

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}, e_1 = 120 \text{ mm}, e_2 = 60 \text{ mm}$$

可见动平衡时，点 D_1 、 D_2 到轴的距离分别为

$$e_1 = 120 \text{ mm}, e_2 = 60 \text{ mm}$$

D_1 、 D_2 在 G 与轴构成的平面内， D_1 与 G 在轴的相反两侧， D_2 与 G 在轴的同侧。

第 15 章 虚位移原理

15-1 如图 15-1a 所示曲柄式压缩机的销钉 B 上作用有水平力 F , 此力位于平面 ABC 内。作用线平分 $\angle ABC$ 。设 $AB = BC$, $\angle ABC = 2\theta$, 各处摩擦及杆重不计, 求对物体的压缩力。

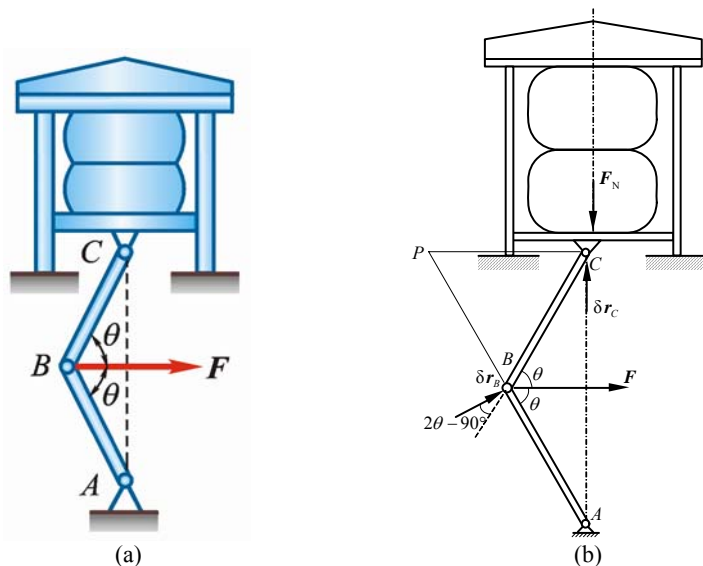


图 15-1

解 令 B 有虚位移 $\delta \mathbf{r}_B \perp AB$, 而 C 有铅直向上的虚位移 $\delta \mathbf{r}_C$, 如图 15-1b 所示。将 $\delta \mathbf{r}_B$ 及 $\delta \mathbf{r}_C$ 向 BC 方向投影, 为简单起见, 以 δr_B 表示 $\delta \mathbf{r}_B$ 的绝对值 $|\delta \mathbf{r}_B|$, 以 δr_C 表示 $|\delta \mathbf{r}_C|$, 则有

$$\delta r_C \cos(90^\circ - \theta) = \delta r_B \cos(2\theta - 90^\circ)$$

即

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{1}{2 \cos \theta} \quad (1)$$

由虚位移原理得

$$F \delta r_B \sin \theta - F_N \delta r_C = 0$$

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{F_N}{F \sin \theta} \quad (2)$$

式 (1) 代入 (2), 得

$$F_N = \frac{F}{2} \tan \theta$$

15-2 在压缩机的手轮上作用 1 力偶, 其力偶矩为 M 。手轮轴的两端各有螺距同为 h 、但方向相反的螺纹。螺纹上各套有 1 个螺母 A 和 B , 这两个螺母分别与长为 a 的杆相铰接, 四杆形成菱形框, 如图 15-2a 所示。此菱形框的点 D 固定不动, 而点 C 连接在压缩机的水平压板上。求当菱形框的顶角等于 2θ 时, 压缩机对被压物体的压力。

解 (1) 令手轮沿力偶方向有虚角位移 $\delta \varphi$, 则螺母 A 有虚位移 $\delta \mathbf{r}_A$, C 点有虚位移 $\delta \mathbf{r}_C$, 方向如图。由虚位移原理得

$$-F_N \delta r_C + M \delta \varphi = 0$$

即

$$\frac{\delta r_C}{\delta \varphi} = \frac{M}{F_N} \quad (1)$$

(2) 求 δr_C 与 $\delta \varphi$ 之关系: 先找 $\delta \mathbf{r}_A$ 与 $\delta \varphi$ 的关系, 设 δx_A 为 $\delta \mathbf{r}_A$ 沿轴 AB 的分量, 则

$$\frac{\delta \varphi}{2\pi} = \frac{\delta x_A}{h}, \delta x_A = \frac{h}{2\pi} \delta \varphi$$

$$\delta x_A = \frac{\delta x_A}{\cos \theta} = \frac{h}{2\pi \cos \theta} \delta \varphi \quad (2)$$

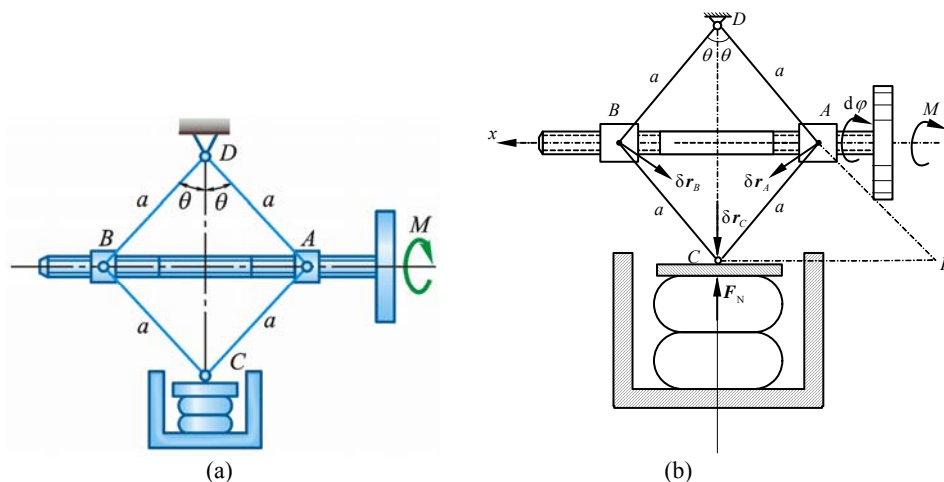


图 15-2

(3) 再找 δr_C 与 δr_A 的关系，设点 O 为杆 AC 虚速度瞬心，则

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_A}{\delta r_C} &= \frac{OA}{OC} = \frac{a}{2a \sin \theta} = \frac{1}{2 \sin \theta} \\ \delta r_C &= 2 \sin \theta \delta r_A = 2 \sin \theta \cdot \frac{h}{2\pi \cos \theta} \delta \varphi \\ \frac{\delta r_C}{\delta \varphi} &= \frac{h}{\pi} \tan \theta \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) 代入式 (1) 得

$$F_N = \frac{\pi M}{h} \cot \theta$$

15-3 挖土机挖掘部分示意如图 15-3a。支臂 DEF 不动， A 、 B 、 D 、 E 、 F 为铰链，液压缸 AD 伸缩时可通过连杆 AB 使挖斗 BFC 绕 F 转动， $EA = FB = a$ 。当 $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$ 时，杆 $AE \perp DF$ ，此时油缸推力为 F 。不计构件重量，求此时挖斗可克服的最大阻力矩 M 。

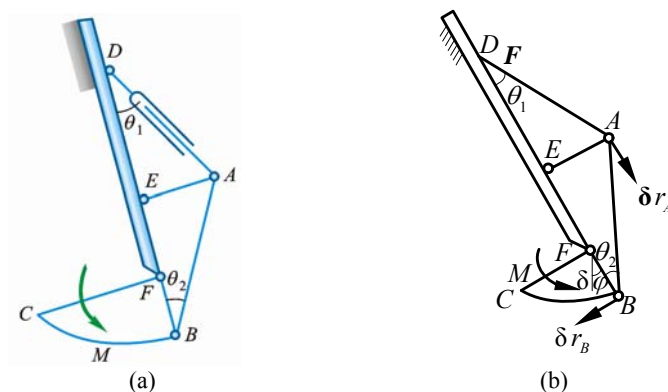


图 15-3

解 由虚位移原理：

$$F \cos \theta_1 \cdot \delta r_A - M \delta \varphi = 0 \quad (1)$$

式中

$$\delta \varphi = \frac{\delta r_B}{a} \quad (2)$$

A 、 B 的虚位移向 AB 投影，得

$$\begin{aligned} \delta r_A \cos \theta_2 &= \delta r_B \sin \theta_2 \\ \delta r_A &= \delta r_B \tan \theta_2 \end{aligned} \quad (3)$$

式 (2)、(3) 代入式 (1) 得

$$F \cos \theta_1 \cdot \tan \theta_2 \cdot \delta r_B - M \cdot \frac{\delta r_B}{a} = 0$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ, M = Fa \sin \theta_2, M = \frac{1}{2} Fa$$

15-4 如图 15-4a 所示，远距离操纵用的夹钳为对称结构。当操纵杆 EF 向右移动时，两块夹板就会合拢将物体夹住。已知操纵杆的拉力为 F ，在图示位置两夹板正好相互平行，求被夹物体所受的压力。

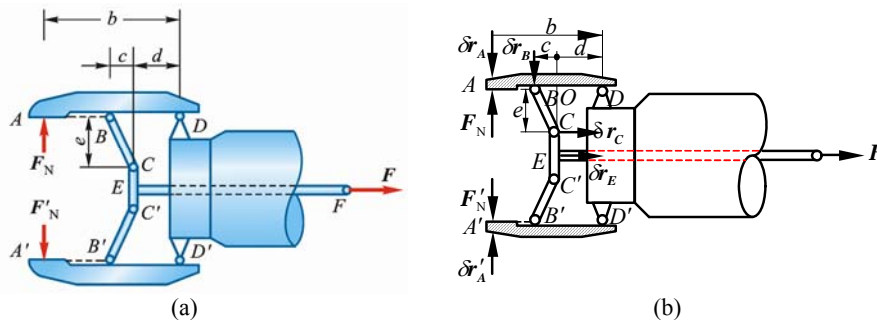


图 15-4

解 令杆 CEC' 有水平向右虚位移 δr_E ，则点 A 有向下的虚位移 δr_A ，点 A' 有向上的虚位移 $\delta r'_A$ ，因结构对称， $\delta r_A = \delta r'_A$ ，点 O 为杆 BC 虚位移瞬心，如图 15-4b 所示。各虚位移间有如下的关系：

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{b}{c+d}, \quad \delta r_C = \delta r_E, \quad \frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{c}{e}$$

故

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_E} = \frac{\delta r_A}{\delta r_B} \cdot \frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{b}{c+d} \cdot \frac{c}{e} \quad (1)$$

由虚位移原理

$$-F_N \delta r_A - F'_N \delta r'_A + F \delta r_E = 0$$

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_E} = \frac{F}{2F_N} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$F_N = \frac{F e(c+d)}{2 bc}$$

15-5 在图 15-5a 所示机构中，当曲柄 OC 绕轴 O 摆动时，滑块 A 沿曲柄滑动，从而带动杆 AB 在铅直导槽 K 内移动。已知： $OC = a$ ， $OK = l$ ，在点 C 处垂直于曲柄作用 1 力 F_1 ；而在点 B 沿 BA 作用 1 力 F_2 。求机构平衡时 F_2 与 F_1 的关系。

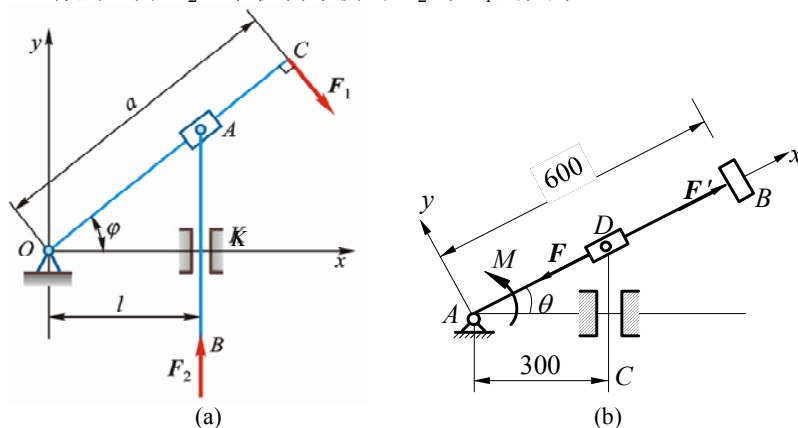


图 15-5

解 用解析法解，选取 φ 为广义坐标，则滑块 A 的约束方程为

$$y_A = l \tan \varphi, \quad \delta y_A = l \sec^2 \varphi \delta \varphi \quad (1)$$

由虚位移原理

$$(-F_1 a) \delta \varphi + F_2 \delta y_A = 0 \quad (2)$$

式 (1) 代入式 (2)，得

$$-F_1 a \delta \varphi + F_2 l \sec^2 \varphi \delta \varphi = 0$$

因 $\delta \varphi \neq 0$ ，于是有

$$-F_1 a + F_2 l \sec^2 \varphi = 0, \quad F_1 = \frac{F_2 l}{a \cos^2 \varphi}$$

15-6 在图 15-6a 所示机构中，曲柄 OA 上作用 1 力偶，其矩为 M ，另在滑块 D 上作用水平力 F 。机构尺寸如图 15-6a 所示。求当机构平衡时，力 F 与力偶矩 M 的关系。

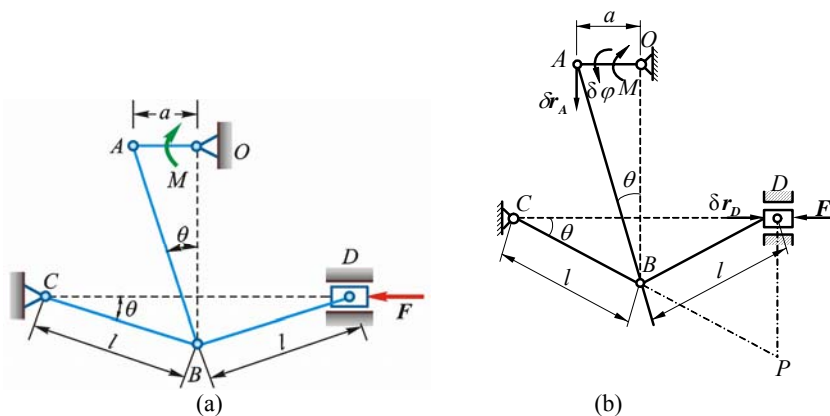


图 15-6

解 令滑块 D 有虚位 δr_D ，则点 B 有虚位移 δr_B ，点 A 有虚位移 δr_A ，杆 OA 有虚位移 $\delta \varphi$ ，如图 15-6b 所示。由虚位移原理

$$-M \delta \varphi + F \delta r_D = 0$$

即

$$\frac{\delta r_D}{\delta \varphi} = \frac{M}{F} \quad (1)$$

找各虚位移间关系：因点 E 为杆 BD 的虚速度瞬心，故

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_B} = \frac{ED}{EB} = \frac{2l \sin \theta}{l} = 2 \sin \theta$$

将 δr_A 及 δr_B 沿 AB 方向投影得

$$\delta r_A \cos \theta = \delta r_B \cos 2\theta$$

即

$$\frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}$$

$$\frac{\delta r_D}{a \delta \varphi} = \frac{\delta r_D}{\delta r_A} = \frac{\delta r_D}{\delta r_B} \frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$

得

$$\frac{\delta r_D}{\delta \varphi} = a \tan 2\theta \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$F = \frac{M}{a} \cot 2\theta$$

15-7 如图 15-7a 所示滑套 D 套在光滑直杆 AB 上，并带动杆 CD 在铅直滑道上滑动，已知 $\theta = 0^\circ$ 时弹簧为原长，弹簧刚度系数为 5 kN/m 。求在任意位置平衡时，应加多大的力偶矩 M ？

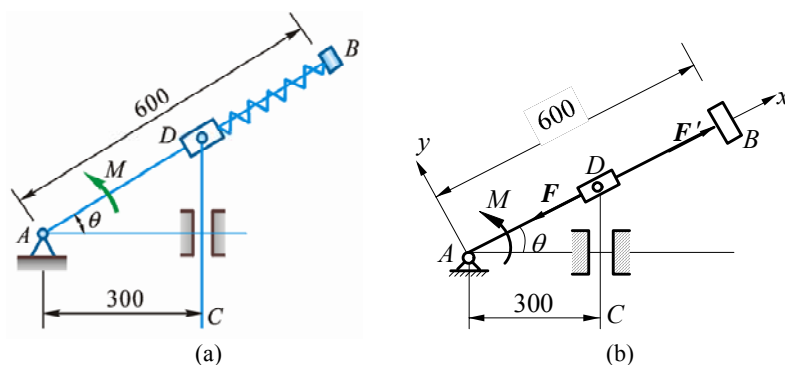


图 15-7

解 解除弹簧约束, 代之以弹性力 F 及 F' 。已知 $\theta = 0$ 时, 弹簧原长为 0.3 m , 在任意角 θ 时, 弹簧

$$DB = AB - AD = (0.6 - \frac{0.3}{\cos \theta})$$

此时弹簧的缩短量为

$$\delta = 0.3 - DB = (\frac{0.3}{\cos \theta} - 0.3)$$

弹性力

$$F = F' = k(\frac{0.3}{\cos \theta} - 0.3)$$

取 x 轴沿杆 AB , 设点 D 沿杆的坐标为 x_D , 选取 θ 为广义坐标, 则滑块 D 的约束方程为

$$x_D = \frac{0.3}{\cos \theta}, \quad \delta x_D = \frac{0.3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \delta \theta$$

另外有

$$x_B = \text{常量}, \quad \delta x_B = 0$$

由虚位移原理

$$(-F) \delta x_D + M \delta \theta = 0$$

把 F 及 δx_D 的表达式代入上式得

$$\begin{aligned} -k(\frac{0.3}{\cos \theta} - 0.3) \cdot \frac{0.3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \delta \theta + M \delta \theta &= 0 \\ M &= k \cdot 0.3 (\frac{1}{\cos \theta} - 1) \cdot \frac{0.3 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

把 $k = 5000 \text{ N/m}$ 代入求得

$$M = 450 \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos^3 \theta} \text{ N} \cdot \text{m}$$

15-8 如图 15-8a 所示, 两等长杆 AB 与 BC 在点 B 用铰链连接, 又在杆的 D 、 E 两点连 1 弹簧。弹簧的刚性系数为 k , 当距离 AC 等于 a 时, 弹簧内拉力为零。如在点 C 作用 1 水平力 F , 杆系处于平衡, 求距离 AC 之值。

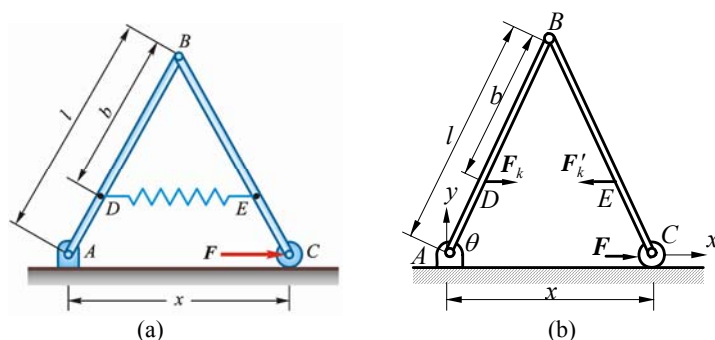


图 15-8

解 解除弹簧约束, 计算弹性力, 设弹簧原长为 L_0 。当 $AC = a$ 时,

$$\frac{l_0}{a} = \frac{b}{l}, \quad L_0 = \frac{b}{l}a$$

同理可得变形后的弹簧长度为

$$l = \frac{b}{l}x$$

弹簧变形量为

$$\frac{b}{l}(x-a)$$

则弹性力

$$F_1 = F'_1 = k \frac{b}{l}(x-a) \quad (1)$$

作坐标系 Axy , 设 $\angle BAC = \theta$, 取 θ 为广义坐标如图 15-8b 所示, 则

$$x_C = 2l \cos \theta, x_D = (l-b) \cos \theta, x_E = (l+b) \cos \theta$$

求坐标的变分:

$$\delta x_C = -2l \sin \theta \delta \theta, \delta x_D = -(l-b) \sin \theta \delta \theta, \delta x_E = -(l+b) \sin \theta \delta \theta$$

由虚位移原理

$$F_1 \delta x_D + (-F'_1) \delta x_E + F \delta x_C = 0$$

故有

$$[-F_1(l-b) + F'_1(l+b) - 2Fl] \sin \theta \delta \theta = 0$$

因

$$\sin \theta \neq 0, \delta \theta \neq 0$$

故

$$-F_1(l-b) + F'_1(l+b) - 2Fl = 0 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 得

$$x = a + \frac{F}{k} \left(\frac{l}{b} \right)^2$$

15-9 在图 15-9a 所示机构中, 曲柄 AB 和连杆 BC 为均质杆, 具有相同的长度和重量 W_1 。滑块 C 的重量为 W_2 , 可沿倾角为 θ 的导轨 AD 滑动。设约束都是理想的, 求系统在铅垂面内的平衡位置。

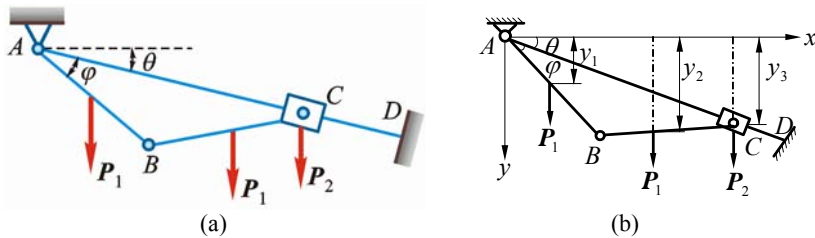


图 15-9

解 取 φ 为广义坐标, 另作坐标系 Axy , 设 $AB = BC = l$, 因

$$y_1 = \frac{l}{2} \sin(\theta + \varphi)$$

$$y_2 = AC \sin \theta + \frac{l}{2} \sin(\varphi - \theta) = 2l \cos \varphi \sin \theta + \frac{l}{2}(\varphi - \theta)$$

$$y_C = AC \sin \theta = 2l \cos \varphi \sin \theta$$

对坐标的变分:

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= \frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi) \delta \varphi \\ \delta y_2 &= \left[-2l \sin \varphi \sin \theta + \frac{l}{2} \cos(\varphi - \theta) \right] \delta \varphi \\ \delta y_C &= -2l \sin \varphi \sin \theta \delta \varphi\end{aligned}$$

由虚位移原理

$$P_1 \delta y_1 + P_1 \delta y_2 + P_2 \delta y_C = 0$$

$$\text{即} \quad \left\{ P_1 \left[\frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi) - 2l \sin \varphi \sin \theta + \frac{l}{2} \cos(\varphi - \theta) \right] - 2P_2 l \sin \varphi \sin \theta \right\} \delta \varphi = 0$$

因 $\delta \varphi \neq 0$, 故有

$$P_1 \left[\frac{l}{2} \cos(\theta + \varphi) - 2l \sin \varphi \sin \theta + \frac{l}{2} \cos(\varphi - \theta) \right] - 2P_2 l \sin \varphi \sin \theta = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\cos \theta \cos \varphi - 2 \sin \theta \sin \varphi}{2 \sin \theta \sin \varphi} = \frac{1}{2} \cot \theta \cot \varphi - 1$$

$$\text{故} \quad \tan \varphi = \frac{P_1}{2(P_1 + P_2)} \cot \theta$$

15-10 如图 15-10a 所示机构, 在力 F_1 与 F_2 作用下在图示位置平衡, 不计各构件自重与各处摩擦, $OD = BD = l_1$, $AD = l_2$ 。求 F_1/F_2 的值。

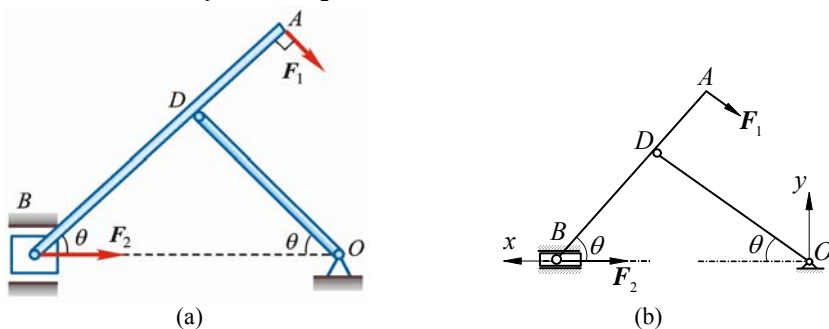


图 15-10

解 如图 15-10b 所示

$$\begin{aligned}x_B &= 2l_1 \cos \theta, \quad \delta x_B = -2l_1 \sin \theta \cdot \delta \theta \\ x_A &= (l_1 - l_2) \cos \theta, \quad \delta x_A = -(l_1 - l_2) \sin \theta \cdot \delta \theta \\ y_A &= (l_1 + l_2) \sin \theta, \quad \delta y_A = (l_1 + l_2) \cos \theta \cdot \delta \theta\end{aligned}$$

代入虚功方程, 得

$$(-F_2) \delta x_B + (-F_1 \sin \theta) \delta x_A + (-F_1 \cos \theta) \delta y_A = 0$$

$$\text{即} \quad 2l_1 F_2 \sin \theta \cdot \delta \theta + F_1 (l_1 - l_2) \sin^2 \theta \cdot \delta \theta - F_1 (l_1 + l_2) \cos^2 \theta \cdot \delta \theta = 0$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2l_1 \sin \theta}{l_1 + l_2 \cos 2\theta}$$

15-11 如图 15-11a 所示均质杆 AB 长为 $2l$, 1 端靠在光滑的铅直墙壁上, 另 1 端放在固定光滑曲面 DE 上。欲使细杆能静止在铅直平面的任意位置, 问曲面的曲线 DE 的形式应是怎样的?

解 作坐标系 Dxy , 由于杆 AB 只受主动力 P 作用, 根据虚位移原理

$$P \delta y_C = 0, \quad P \neq 0, \quad \delta y_C = 0$$

故 $y_C = \text{常量}$

杆在铅直位置时

$$y_{C0} = l, \quad y_C = l$$

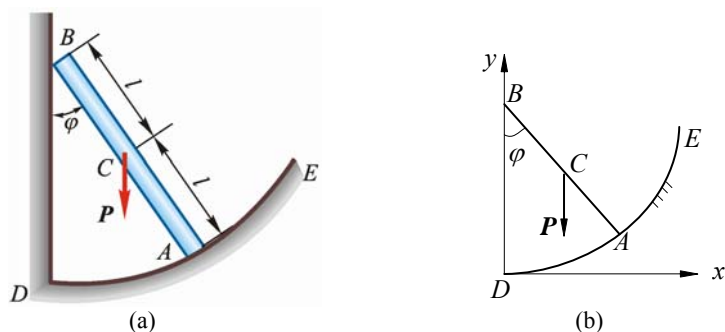


图 15-11

杆在任意位置时

$$y_C = y_A + l \cos \varphi,$$

即 $l = y_A + l \cos \varphi$

$$y_A = l(1 - \cos \varphi)$$

$$x_A = 2l \sin \varphi$$

消去 φ 得 DE 曲线方程

$$\frac{x_A^2}{4l^2} + \frac{(l - y_A)^2}{l^2} = 1$$

由方程知, DE 曲线为中心在 (0, l) 长短半轴分别为 2l 和 l 的椭圆的 1 部分。如坐标系 Dxy 向上平移 l 距离, 则 DE 曲线方程与教材答案一致。

15-12 跨度为 l 的折迭桥由液压油缸 AB 控制铺设, 如图 15-12a 所示。在铰链 C 处有 1 内部机构, 保证两段桥身与铅垂线的夹角均为 θ 。如果两段相同的桥身重量都是 P, 质心 G 位于其中点, 求平衡时液压油缸中的力 F 和角 θ 之间的关系。

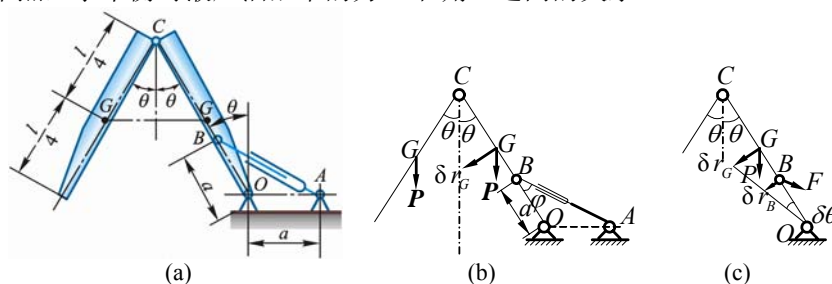


图 15-12

解 如图 15-12b 所示

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

由虚功原理, 得

$$2 \cdot P \delta r_G \sin \theta - F \delta r_B \sin \varphi = 0$$

式中

$$\delta r_B = \frac{a}{l/4} \delta r_G$$

从而有

$$2P \delta r_G \sin \theta - F \cdot \frac{4a}{l} \delta r_G \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$F = \frac{lP \sin \theta}{2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}lP \sin \theta \sqrt{1 + \sin \theta}}{2a \cos \theta}$$

$$F = \frac{\sqrt{2}lP}{2a} \tan \theta \sqrt{1 + \sin \theta}$$

15-13 半径为 R 的滚子放在粗糙水平面上, 连杆 AB 的两端分别与轮缘上的点 A 和滑块 B 处铰接。现在滚子上施加矩为 M 的力偶, 在滑块上施加力 F, 使系统处于图 15-13a 所

示位置处平衡。设力 F 为已知，滚子有足够大的重力 P ，忽略滚动摩擦，不计滑块和各铰链处的摩擦，不计杆 AB 与滑块的重力。求力偶矩 M 以及滚子与地面间的摩擦力 F_s 。

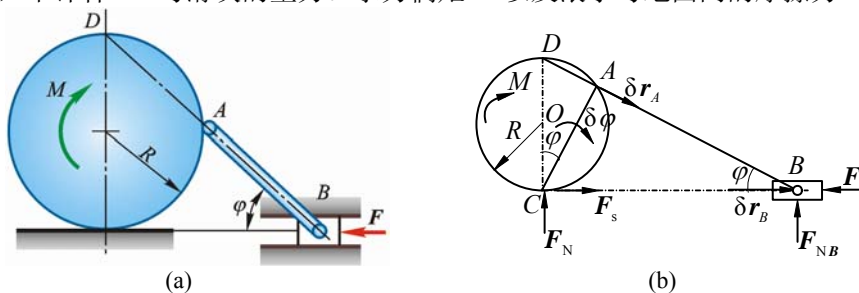


图 15-13

解 由已知可知，滚子只滚不滑，给滚子虚位移 $\delta\varphi$ (如图 15-13b)，则

$$\delta r_A = 2R \cos \varphi \delta\varphi \quad (1)$$

由虚位移(虚速度)投影，得

$$\delta r_A = \delta r_B \cos \varphi \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$\delta r_B = 2R \cos \varphi \delta\varphi \quad (3)$$

做功力为 M 、 F ，虚功方程为

$$M\delta\varphi - F\delta r_B = 0 \quad (4)$$

式(3)代入式(4)，得

$$M = 2RF$$

再由平衡：

$$\sum F_x = 0, \quad F_s = F$$

15-14 杆系在铅垂面内平衡， $AB = BC = l$ ， $CD = DE$ ，且 AB 、 CE 为水平， CB 为铅垂。均质杆 CE 和刚度为 k_1 的拉压弹簧相连，重力为 P 的均质杆 AB 左端有 1 刚度为 k_2 的螺线弹簧。在杆 BC 上作用有水平的线性分布载荷，其最大载荷集度为 q 。不计杆 BC 的重力，求平衡时水平弹簧的变形量 Δ 和螺线弹簧的扭转角 φ 。

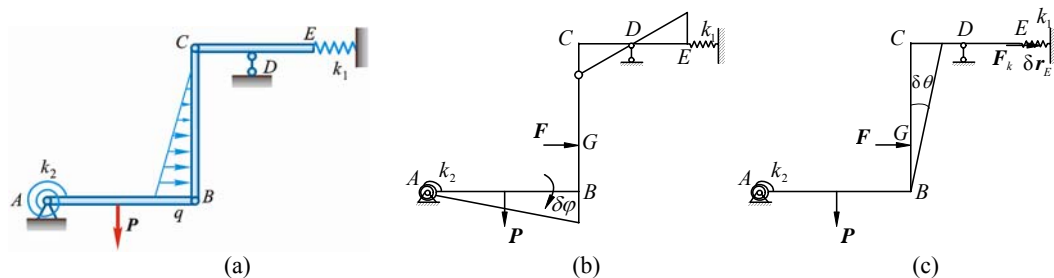


图 15-14

解 此为 2 自由度系统：

(1) 杆 AB 转 $\delta\varphi$ ，杆 BC 不转 ($\delta\theta = 0$)，见图 15-14b，则做功力只有 k_2 弹簧力和 P 。由虚功方程，得

$$-k_2\varphi\delta\varphi + P \cdot \frac{l}{2}\delta\varphi = 0$$

所以弹簧的转角

$$\varphi = \frac{Pl}{2k_2}$$

(2) 杆 AB 不转 ($\delta\varphi = 0$)，杆 BC 转 $\delta\theta$ ，见图 15-14c，则

$$\delta r_E = l\delta\theta$$

代入虚功方程，得

$$\int_0^l (q - \frac{q}{l}x)x\delta\theta dx - k_1\Delta \cdot l\delta\theta = 0$$

$$\left(\frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{3l}x^3\right)\bigg|_0^l - k_1\Delta \cdot l = 0$$

$$\frac{q}{2}l^2 - \frac{q}{3l}l^3 - k_1l \cdot \Delta = 0$$

所以水平弹簧变形量

$$\Delta = \frac{ql}{6k_1}$$

15-15 用虚位移原理求图 15-15a 所示桁架中杆 3 的内力。

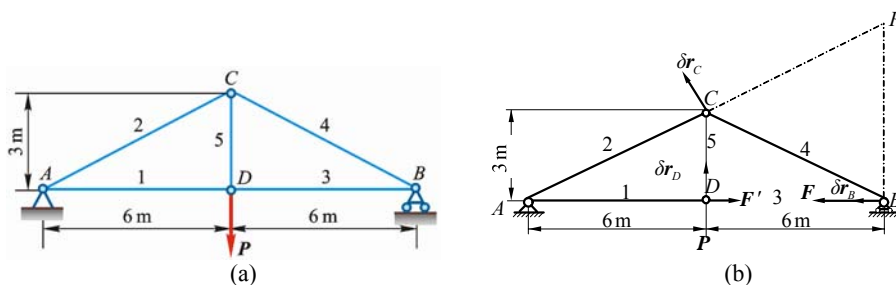


图 15-15

解 将杆 BD 解除代之以力 F 及 F' 。

令点 C 有虚位移 δr_C ，则点 B 必有虚位移 δr_B ，点 D 必有虚位移 δr_D ，如图 15-15b 所示。由虚位移原理得

$$F\delta r_B + F'\delta r_D \cos 90^\circ - P\delta r_D = 0$$

即
$$\frac{\delta r_D}{\delta r_B} = \frac{F}{P} \quad (1)$$

由图 15-15b 知，三角形 ACD 的转轴在点 A，故杆 CB 的瞬心在点 E，故

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_C} = \frac{AD}{AC}, \quad \frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{EC}{EB}$$

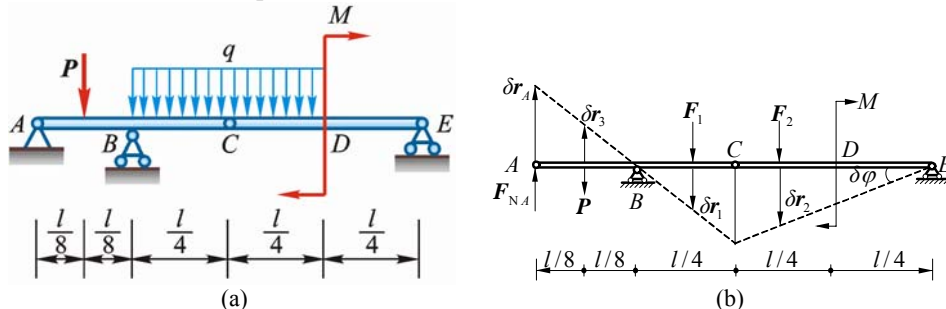
所以

$$\frac{\delta r_D}{\delta r_B} = \frac{\delta r_D}{\delta r_C} \cdot \frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2}} \cdot \frac{\sqrt{6^2 + 3^2}}{6} = 1 \quad (2)$$

由式 (1)，(2) 得

$$F = F' = P \text{ (拉)}$$

15-16 组合梁由铰链 C 连接 AC 和 CE 而成，载荷分布如图 15-16a 所示。已知跨度 $l = 8 \text{ m}$ ， $P = 4900 \text{ N}$ ，均布力 $q = 2450 \text{ N/m}$ ，力偶矩 $M = 4900 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求支座约束力。



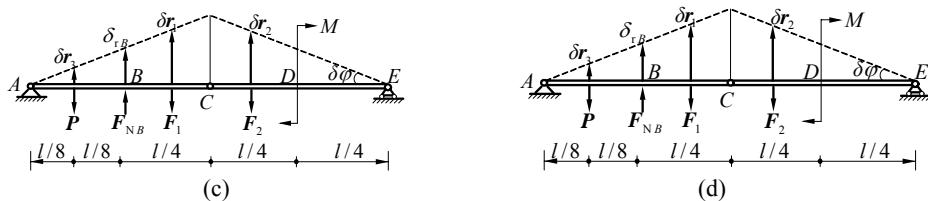


图 15-16

解 (1) 把均布载荷化作集中力

$$F_1 = F_2 = \frac{ql}{4}$$

解除支座 A 的垂直方向约束, 以力 F_{NA} 代之。令点 A 有向上的虚位移 δr_A , 则各力作用点处有相应的虚位移如图 15-16b 所示。由几何关系

$$\delta r_1 = \delta r_3 = \frac{1}{2} \delta r_A, \quad \delta r_2 = \frac{3}{4} \delta r_A, \quad \frac{l}{2} \delta \varphi = \delta r_A, \quad \delta \varphi = \frac{2}{l} \delta r_A$$

由虚位移原理:

$$F_{NA} \delta r_A - P \delta r_3 + F_1 \delta r_1 + F_2 \delta r_2 - M \delta \varphi = 0$$

即

$$(F_{NA} - \frac{P}{2} + \frac{F_1}{2} + \frac{3}{4} F_2 - \frac{2M}{l}) \delta r_A = 0$$

$$F_{NA} - \frac{P}{2} + \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2M}{l} = 0$$

把数据代入, 解得

$$F_{NA} = -2450 \text{ N} \quad (\text{负号表示与原设反向})$$

(2) 解除约束 B , 代之以力 F_{NB} , 且虚位移如图 15-16c 所示。由几何关系

$$\delta r_1 = \frac{3}{2} \delta r_B, \quad \delta r_2 = \frac{3}{2} \delta r_B, \quad \delta r_3 = \frac{1}{2} \delta r_B, \quad \delta \varphi = \frac{4}{l} \delta r_B$$

由虚位移原理:

$$F_{NB} \delta r_B - P \delta r_3 - F_1 \delta r_1 - F_2 \delta r_2 + M \delta \varphi = 0$$

把以上各式代入上式得

$$F_{NB} - \frac{P}{2} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{3}{2} + M \frac{4}{l} = 0$$

解得

$$F_{NB} = 14700 \text{ N}$$

(3) 解除约束 E , 代之以力 F_{NE} , 且虚位移如图 d。由虚位移原理:

$$F_{NE} \delta r_E - F_2 \delta r_2 - M \delta \varphi = 0$$

而

$$\delta r_2 = \frac{1}{4} \delta r_E, \quad \delta \varphi = \frac{2}{l} \delta r_E$$

代入上式得

$$F_{NE} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2M}{l} = 0$$

解得

$$F_{NE} = 2450 \text{ N}$$